Des solutions au Rallye Sans frontières d'Aquitaine 2002.

I Des lettres et des chiffres

Il était possible de résoudre cette énigme de bien des façons, en voici deux :

Première méthode :

EFFILE vaut 13 points et FIEL vaut 10 points donc EF vaut 3 points.

FIEL vaut 10 points et FE vaut 3 points donc IL vaut 7 points.

RELIRE vaut 19 points et IL vaut 7 points donc RERE vaut 12 points et RE vaut 6 points.

EF vaut 3 points, seule la lettre O vaut 0 donc E=1 et F=2 ou E=2 et F= 1

RE vaut 6 points, les deux seules possibilités sont E =1 et R=5 ou E=2 et R=4

IL vaut 7 points, 1 et 2 ne peuvent être utilisés car sont les valeurs de E et F.
Pour obtenir 7 on a I=3 et L=4 ou I=4 et L=3 donc 4 est la valeur de I ou de L.
Par conséquent la valeur 4 ne convient pas pour R, donc R=5.

Deuxième méthode :

EFFILE	13 points	①
RELIRE	19 points	②
FIEL	10 points	③

Soit e, f, i, l et r les valeurs respectives des lettres E, F, I, L et R.

De ① et ③, on tire : $e + f = 3$ ④.
De ① et ②, on tire : $2r - 2f = 6$, soit $r - f = 3$ ⑤.
De ③ et ④, on tire : $i + l = 7$ ⑥.

Comme $e > 0$, $f > 0$ et $e + f = 3$: $e = 1$ ou $e = 2$.
• Si $e = 1$, $f = 2$ (d'après ④), $r = 5$ (d'après ⑤) et $i = 4$, $l = 3$ ou $i = 3$, $l = 4$ (d'après ⑥).
On vérifie aisément que cette solution convient.

• Si $e = 2$, $f = 1$ (d'après ④), $r = 4$ (d'après ⑤). Mais il est impossible d'obtenir $i + l = 7$ ($1 + 6$ interdit, $2 + 5$ interdit ainsi que $3 + 4$).

Par conséquent: $r = 5$.

II Que de cartes

Il est possible de trouver la solution sans utiliser la condition “les enfants possèdent moins de 2000 cartes chacun” .

Que l’on range par paquets de 5, 7 ou 9, il reste toujours 3 cartes à chacun des frères Logico donc si on enlève ces 9 cartes au nombre total de cartes, le nombre de cartes restantes est un multiple commun de 5, 7 et 9, c’est-à-dire un multiple de 315.
Au tableur ou à la main, on pouvait compléter le tableau suivant :

Multiples de 315	Nombre total de cartes	Entre 2000 et 4000 ?
0	9	Non
315	324	Non
630	639	Non
…	…	Non
1890	1899	Non
2205	2214	Oui
2520	2529	Oui
2835	2844	Oui
3150	3159	Oui
3465	3474	Oui
3780	3789	Oui
4095	4104	Non

Les solutions sont donc 2 214 ; 2 529 ; 2 844 ; 3 159 ; 3 474 et 3 789.

III Pas de « E »

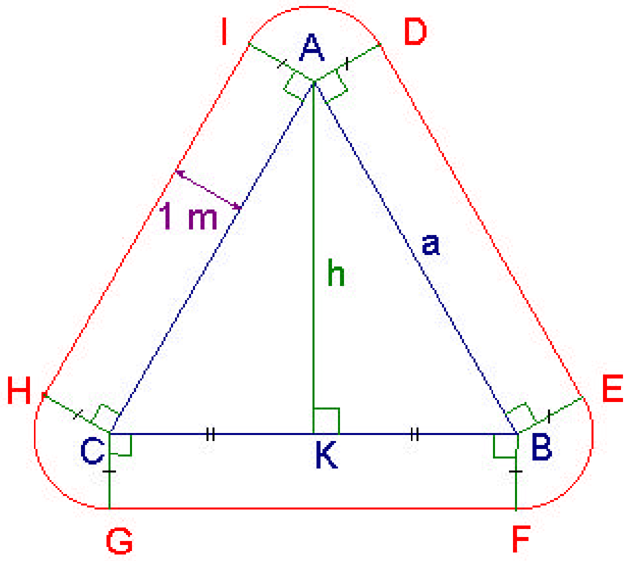
Il faut éliminer tous les nombres dont l'écriture en lettres comporte un "e", c'est-à-dire tous les nombres comportant : deux, quatre, sept, neuf, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, et, trente, quarante, cinquante, soixante, cent, mille …
Ainsi on obtient :

	13-Un million	26-Trois millions
1-Un	14-Un million un	27-Trois millions un
2-Trois	15-Un million trois	28-Trois millions trois
3-Cinq	16-Un million cinq	29-Trois millions cinq
4-Six	17-Un million huit	30-Trois millions six
5-Huit	18-Un million six	31-Trois millions huit
6-Dix	19-Un million dix	32-Trois millions dix
7-Dix-huit	20-Un million dix-huit	33-Trois million dix-huit
8-Vingt	21-Un million vingt	34-Trois millions vingt
9-Vingt-trois	22-Un million vingt-trois	35-Trois millions vingt-trois
10-Vingt-cinq	23-Un million vingt-cinq	36-Trois millions vingt-cinq
11-Vingt-six	24-Un million vingt-six	37-Trois millions vingt-six
12-Vingt-huit	25-Un million vingt-huit	38-Trois millions vingt-huit

39-Cinq millions	52-Six millions
40-Cinq millions un	53-Six millions un
41-Cinq millions trois	54-Six millions trois
42-Cinq millions cinq	55-Six millions cinq
43-Cinq millions six	56-Six millions six
44-Cinq millions huit	57-Six millions huit
45-Cinq millions dix	58-Six millions dix
46-Cinq million dix-huit	59-Six million dix-huit
47-Cinq millions vingt	60-Six millions vingt
48-Cinq millions vingt-trois	61-Six millions vingt-trois
49-Cinq millions vingt-cinq	62-Six millions vingt-cinq
50-Cinq millions vingt-six	63-Six millions vingt-six
51-Cinq millions vingt-huit	64-Six millions vingt-huit

Ainsi le département des Pyrénées-Atlantiques porte, avec le système de Nicole, le numéro 6 000 028

IV La ronde des escargots



La corde représentée en rouge doit être placée comme l'indique la figure ci-dessus.

Soit : **a** la mesure d'un côté du triangle équilatéral ABC en m.
h la mesure de la hauteur du triangle équilatéral ABC en m.

<u>Calcul de la longueur du côté du triangle équilatéral ABC.</u>

$\widehat{BAC} = 60°$, $\widehat{CAI} = \widehat{BAD} = 90°$ donc $\widehat{IAD} = 120°$, de même $\widehat{EBF} = 120°$ et $\widehat{GCH} = 120°$

La somme des longueurs des arcs $\overset{\frown}{ID}$,$\overset{\frown}{EF}$ et $\overset{\frown}{GH}$ est égale au périmètre d'un cercle de rayon 1 m, c'est à dire $2p$.

(on obtiendrait le même en remplaçant le triangle équilatéral ABC par n'importe quel polygone convexe.)

on résout l'équation : $3\,a + 2p = 200$

on obtient : $a = \dfrac{200 - 2p}{3}$

<u>Calcul de l'aire de la parcelle.</u>

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC exprimée en m², $\mathcal{A} = \dfrac{a \times h}{2}$.

Calcul de h :

Dans un triangle équilatéral toute hauteur est aussi médiane donc $KB = \dfrac{a}{2}$

On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AKB dans lequel AB = a et $KB = \dfrac{a}{2}$

On obtient $h = \dfrac{(200 - 2p)\sqrt{3}}{6}$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \frac{200-2p}{3} \times \frac{(200-2p)\sqrt{3}}{6}$$

$$\mathcal{A} = \frac{(200-2p)^2\sqrt{3}}{36} \qquad \mathcal{A} \approx 1\,805{,}48$$

L'aire de la parcelle arrondie au m² est 1 805 m²

V Garder la face

Le nombre total de pièces est 20 et chaque pile ne comporte qu'un nombre pair de pièces,
de plus 20 = 2 + 4 + 6 + 8 est la seule possibilité d'obtenir 20 en ajoutant 4 nombres pairs différents non nuls.
Les autres conditions permettent de trouver la solution .

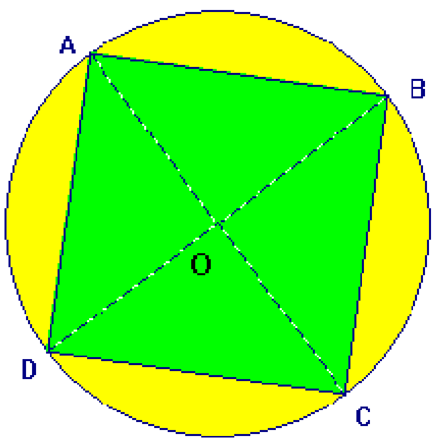
Pile n°1	Pile n°2	Pile n°3	Pile n°4
8 pièces	4 pièces	6 pièces	2 pièces

VI C'est pas de la tarte !

Soit r le rayon de la tarte et O son centre.

Les quatre coups de couteau d'Alain sont représentés par les segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

Pour que le carré ABCD soit le plus grand possible contenu dans le disque de rayon r et de centre O il faut que ses diagonales soient deux diamètres perpendiculaires.



Les quatre morceaux engloutis sont colorés en jaune sur la figure.

L'aire du disque est p R².
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AOB rectangle en O, on obtient : AB² = 2R².
L'aire du carré ABCD est 2R² .
La somme des aires des morceaux prélevés est :
p R² - 2R², c'est-à-dire (p -2)R².

La fraction prélevée représente $\frac{(p-2)R^2}{pR^2}$ de la tarte.

$$\frac{(p-2)R^2}{pR^2} = \frac{p-2}{p} \approx 0{,}363 \quad \text{or } 0{,}363 > \frac{1}{3}$$

En conclusion, Hubert a vu juste, **ils ont mangé plus du tiers de la tarte**.

VI I Bisque …rage

	a	b	c	d	e	f	g	h
A	**1**	**3**		**8**	**9**		**5**	**2**
B		**7**	**3**		**8**	**5**		**0**
C	**7**		**2**	**5**		**3**	**4**	
D	**4**	**0**		**8**	**0**		**5**	**0**

Horizontalement :

A $3^2 + 2^2 =$ **13**
$8^2 + 5^2 =$ **89**
$6^2 + 4^2 =$ **52**

B $8^2 + 3^2 =$ **73**
$9^2 + 2^2 =$ **85**

C $4^2 + 3^2 =$ **25**
$3^2 + 5^2 =$ **34** *

D $6^2 + 2^2 =$ **40** *les trois plus petits bisques à un chiffre sont : 10 ; 13 et 17.*
$8^2 + 4^2 =$ **80** *les bisques à 1 chiffre sont :2 ; 5 et 8.*
$5^2 + 5^2 =$ **50**

Verticalement :

a $5^2 + 7^2 =$ **74**

b $6^2 + 1^2 =$ **37**

c $2 \times 4^2 = 4^2 + 4^2 =$ **32**

d $7^2 + 3^2 =$ **58**

e $7^2 + 7^2 =$ **98**

f $7^2 + 7^2 =$ **53**

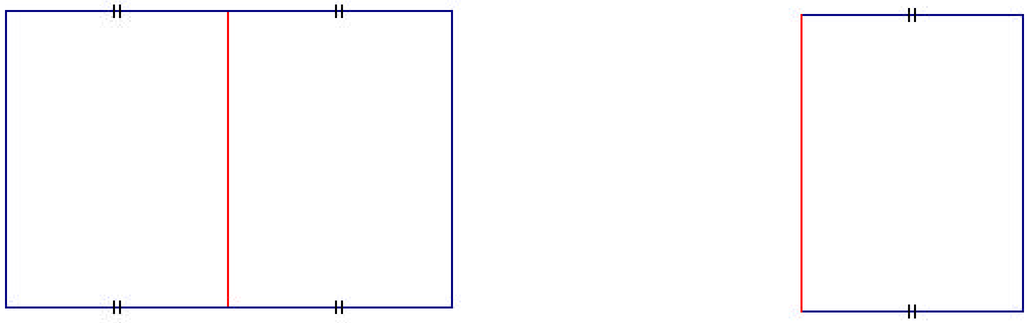
g $3^2 + 6^2 =$ **45**

h $2^2 + 4^2 =$ **20**

**Les bisques inférieurs à100 sont : 2 ; 5 ; 8 ; 10 ; 13 ; 17 ; 18 ; 20 ; 25 ; 26 ; 29 ; 32 ; 34 ; 37 ; 40 ; 41 ; 45 ; 50 ; 52 ; 53 ; 58 ; 61 ; 65 ; 68 ; 72 ; 73 ; 74 ; 80 ; 82 ; 85 ; 89 ; 90 ; 97 et 98.*

VIII Une affaire vite pliée

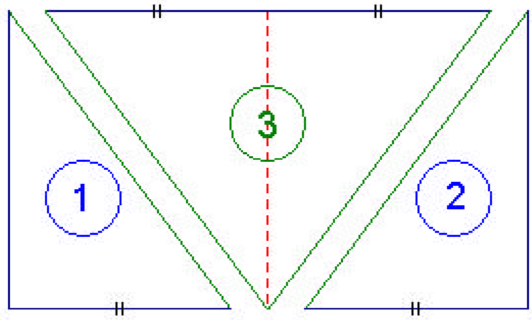
Une solution :
La feuille découpée étant homogène (hypothèse implicite), l'égalité des masses est équivalente à l'égalité des aires.



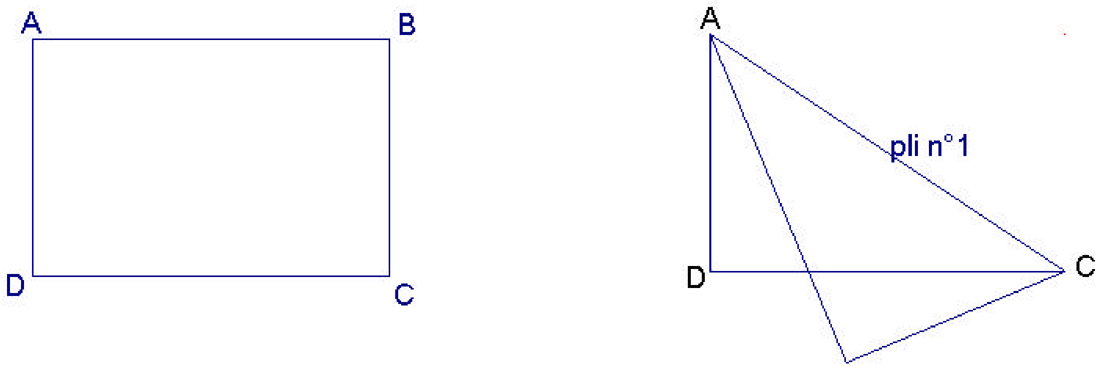
① on plie la feuille en deux selon une médiane

② on plie le rectangle obtenu selon une diagonale. Puis on découpe en suivant cette diagonale.

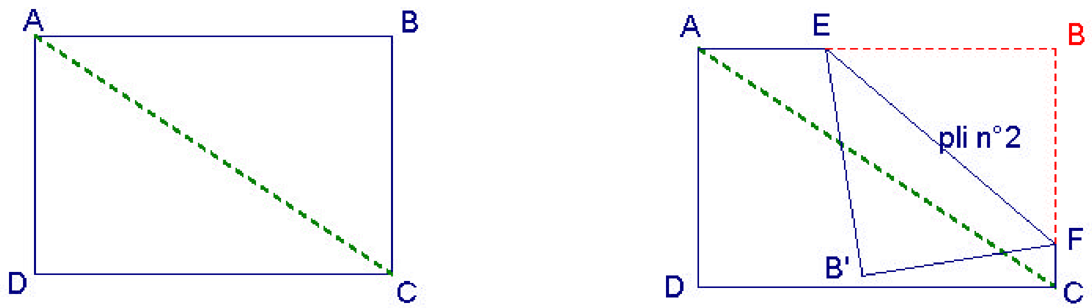
On obtient deux triangles rectangles isométriques et un troisième triangle dont l'aire est égale à la somme des aires des deux triangles précédents



Une autre solution :

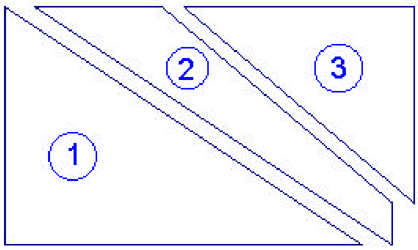


① on plie la feuille en deux selon une diagonale



② on déplie la feuille, puis on la plie selon (EF)
B' est le symétrique de B par rapport à (EF).
on coupe en suivant la diagonale[AC].

L'aire du « triangle 1 » est égale à la moitié de l'aire du rectangle initial La somme des aires des morceaux « 2 » et « 3 » est aussi égale à la moitié de l'aire du rectangle initial.



IX Pour cents Cycles

x désigne le prix d'achat du premier scooter et y désigne le prix d'achat du second.

Il a réalisé 10 % de bénéfice sur le premier et perdu 10 % sur l'autre, il vend les deux pour 2100 €.
Ainsi on peut écrire :
$1{,}10x + 0{,}90y = 2100$

De plus, il a réalisé un bénéfice global de 5 %, il vient alors :
$1{,}05\,(x + y) = 2100$

Finalement on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\begin{cases} 1{,}10x + 0{,}90y = 2100 (A) \\ 1{,}05x + 1{,}05y = 2100 (B) \end{cases} \quad \begin{cases} 1{,}10x + 0{,}90y = 2100 (A) \\ -0{,}05x + 0{,}15y = 0 (B - A) \end{cases} \quad \begin{cases} 1{,}10x + 0{,}90y = 2100 \\ x = \dfrac{0{,}15}{0{,}05} y \end{cases}$$

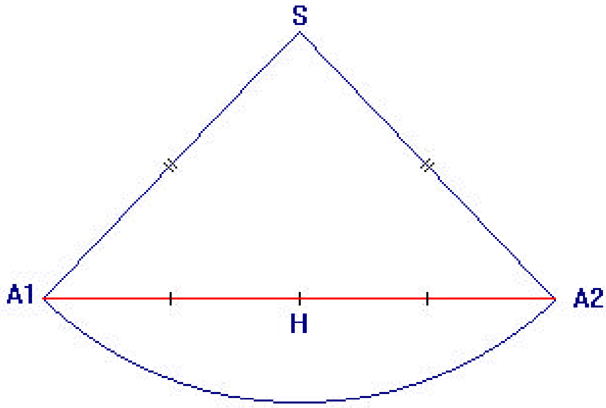
$$\begin{cases} 1{,}10x + 0{,}90y = 2100 \\ x = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} 3{,}3y + 0{,}9y = 2100 \\ x = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} 4{,}2y = 2100 \\ x = 3y \end{cases}$$

Et finalement $\begin{cases} y = 500 \\ x = 1500 \end{cases}$

En conclusion, le marchand de cycles achète le premier scooter **1500 €** pour le revendre 1650 € et achète le second **500 €** pour le revendre 450 €.

X La fourmi géomètre

L'unité de longueur est le cm.

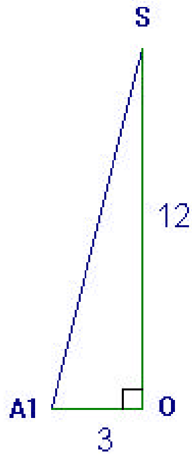


Pour schématiser le chemin le plus court que doit suivre la fourmi, on construit un patron de la surface latérale du cône.

Sur ce patron le plus court chemin qui permet de partir de A pour revenir en A en faisant le tour du cône est représenté par le segment $[A_1A_2]$.

Il faut donc calculer la longueur A_1A_2.

Calcul de SA_1.



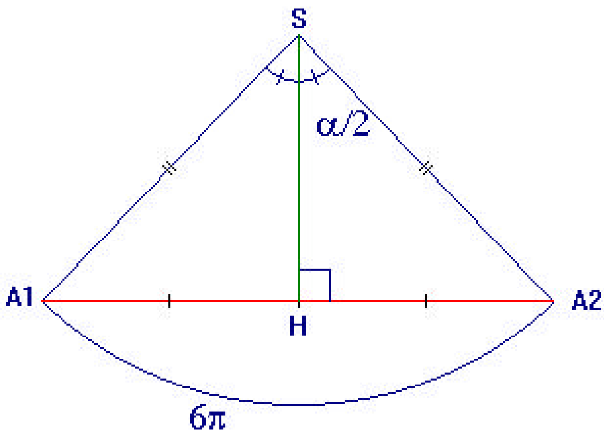
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle A_1SO rectangle en O, on obtient :

$SA_1 = \sqrt{153}$

<u>Calcul de A_1A_2.</u>

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{A_1A_2}$ est égale au périmètre du disque de base, donc mesure ici $6p$.

Dans un cercle, la longueur de l'arc est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qu'il détermine :



Angle au centre en degrés	360	α
Longueur de l'arc en cm	$2\sqrt{153}\,\pi$	$6p$

$$\alpha = \frac{360\times 6p}{2\sqrt{153}\,p} = \frac{1080}{\sqrt{153}} \quad \text{et} \quad \frac{a}{2} = \frac{540}{\sqrt{153}}$$

Le triangle A_1SA_2 est isocèle en S donc la hauteur (SH) issue de S coupe le côté $[A_1A_2]$ en son milieu.

Dans le triangle rectangle SHA_2 rectangle en H, on a $\sin \widehat{HSA_2} = \dfrac{HA_2}{SA_2}$ d'où $HA_2 = SA_2 \sin \widehat{HSA_2}$.

Enfin $A_1A_2 = 2\,HA_2 = 2\,SA_2 \sin \widehat{HSA_2}$

$A_1A_2 = 2\sqrt{153}\sin\left(\dfrac{540}{\sqrt{153}}\right)$

$A_1A_2 \approx 17{,}078$

L'arrondi au mm du chemin emprunté par la fourmi est donc 17,1 cm

XI La touche ☺

Une solution.
On peut remarquer que si l'on augmente le nombre du départ d'une certaine quantité, celui obtenu est augmenté du tiers de cette quantité.

Par exemple **7 ☺ = 5** **et** **1 ☺ = 3** avec 7 – 1 = 6 et 5 – 3 = 2
34 ☺ = 14 **et** **7 ☺ = 5** avec 34 – 7 = 27 et 14 – 5 = 9

Ce qui précède suggère une division par 3, de plus on s'aperçoit qu'il suffit d'ajouter 8 au nombre du départ avant d'effectuer la division par 3 pour retrouver les résultats donnés.

pour 91, on obtient **91 ☺ =** $\dfrac{91+8}{3}$ **91 ☺ =33**

Pour les plus matheux, on constate la proportionnalité des accroissements, en effet :

$\dfrac{5-3}{7-1} = \dfrac{14-5}{34-7} = \dfrac{14-3}{34-1} = \dfrac{1}{3}$ ceci suggère d'utiliser une fonction affine de la forme $f(x) = \dfrac{1}{3}x + b$

$f(1) = 3$ fournit l'équation $\dfrac{1}{3}\times 1 + b = 3$ donc $b = \dfrac{8}{3}$ et $f(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$

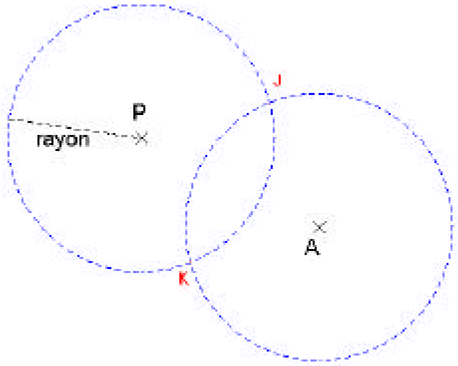
$f(91) = \dfrac{1}{3}\times 91 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{99}{3} = 33$

91 ☺ =33

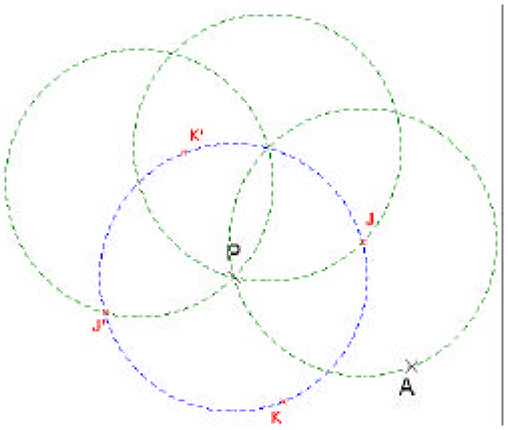
XII La chasse au trésor

Il s'agit de construire le symétrique du point A par rapport au point P.
Pour plus de clarté certains traits de construction ne sont pas reportés d'une figure sur la suivante.

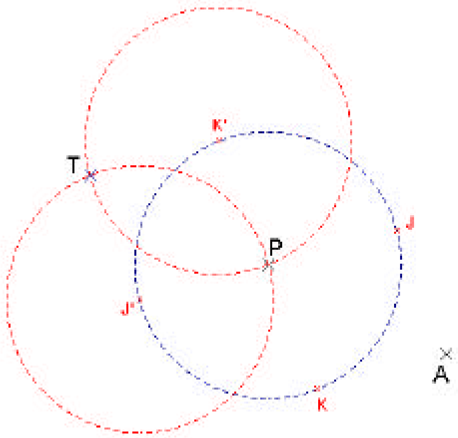
Première étape
On construit les sommets du losange AJPK dont la longueur des côtés correspond à l'écartement des branches du compas.



Deuxième étape
On construit J' et K' les symétriques respectifs de J et K par rapport à P . Pour cela on reporte 3 fois le rayon. (Sur la figure, n'ont été tracés que les cercles qui ont permis de construire le point J'. K' a été construit de façon analogue)



Troisième étape
On construit T le quatrième sommet du losange TJ'PK'. Ce losange est le symétrique du losange AJPK par rapport à O donc le point T est le symétrique de A par rapport à P et indique l'emplacement du trésor.



XIII Course auto

On dispose de 7 piles qui peut fournir de l'énegie pendant 4 tours, il faut toujours 4 piles non déchargées dans la voiture donc le nombre maximun de tours est 7.

Seulement 4 arrêts sont nécessaires pour le remplacement des piles pendant la course.
Le tableau ci-dessous indique une solution possible.

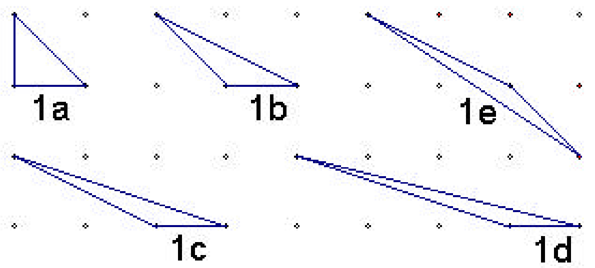
tour n° 1	**piles : 1-2-3-4**
tour n° 2	**piles : 1-2-3-5**
tour n° 3	**piles : 1-2-3-6**
tour n° 4	**piles : 1-2-3-7**
tours n° 5 ; 6 et 7	**piles : 4-5-6-7**

XIV Caprices caprins

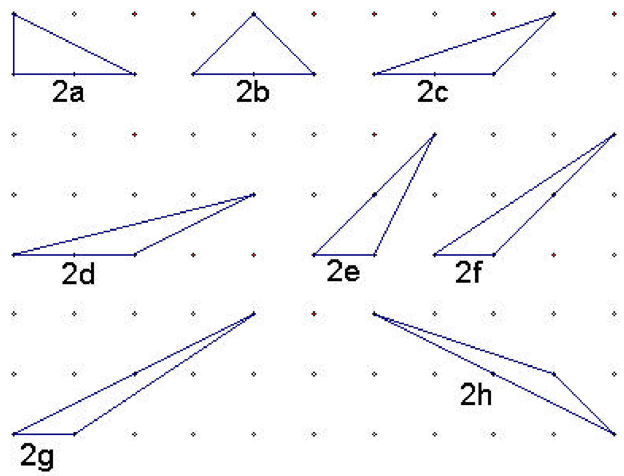
On prend pour unité celle d'un « petit carré », de telle façon que la parcelle ait une aire totale de 8 dans cette unité.

Une étude minutieuse permet de dénombrer tous les triangles de dimensions différentes d'aire $\frac{1}{2}$, ainsi que tous ceux d'aire égale à 1.

On trouve 5 triangles possibles d'aire égale à $\frac{1}{2}$:



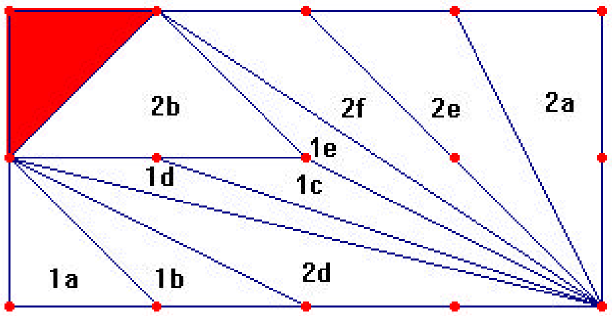
et 8 triangles d'aire égale à 1.



En utilisant les 5 triangles d'aire égale à $\frac{1}{2}$, il reste alors une partie libre d'aire égale à 8 – 5x 0,5 soit 5,5 à l'intérieur de laquelle on pourra placer au mieux 5 triangles d'aire 1. Ce qui donne un maximum théorique de 10 triangles en tout avec un triangle d'aire $\frac{1}{2}$ dans lequel on ne pourra pas mettre de chèvres.

Il ne reste plus qu'à utiliser la « méthode Sylvette » pour obtenir une solution, c'est à dire découper les triangles et utiliser les pièces à la manière d'un puzzle.

Une solution possible :



Une autre solution où toute la superficie de la parcelle est utilisée :