# Rallye Mathématique Sans Frontières 2003

# Des solutions

## 1. Un, deux, trois « fractez » !

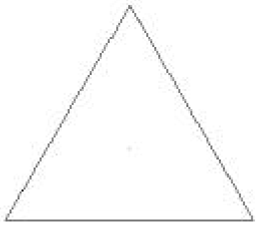
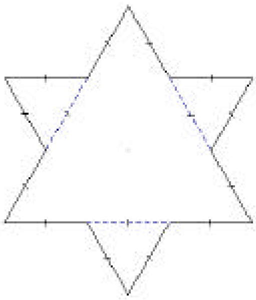
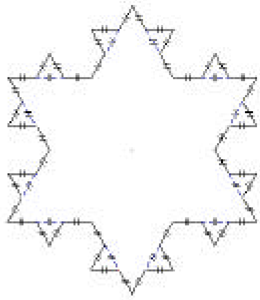


Figure initiale



Après 1^er fractage



Après 2^e fractage

A chaque fractage la longueur d'un côté du triangle équilatéral est multipliée par $\frac{4}{3}$, donc à chaque fractage le périmètre du triangle équilatéral est aussi multiplié par $\frac{4}{3}$.

Le périmètre obtenu est supérieur à 150 m, quand le périmètre initial de 15m a été multiplié par un nombre supérieur à 10.

Soit n le nombre de fractage, on cherche à l'aide d'une calculatrice n tel que $\left(\frac{4}{3}\right)^n > 10$.

On obtient $\left(\frac{4}{3}\right)^8 \approx 9{,}989$ et $\left(\frac{4}{3}\right)^9 \approx 13{,}318$ donc :

**Le nombre minimum de fractages nécessaires pour que le périmètre de la figure soit supérieur à 150 m est : 9.**

## 2. La route du Rhum

Si B est 4$^{e}$alors E n'est pas 3$^{e}$(1) donc D est 2$^{e}$ (6) et B est 5$^{e}$ (3) : impossible.

On en déduit donc que **E est 3$^{e}$**. alors D n'est pas 2$^{e}$,(6)
C n'est pas 3$^{e}$donc **A est 1$^{e}$** (4) et **F est 5$^{e}$** (5)
B n'est pas 5$^{e}$donc **D est 4$^{e}$**,(3)
**B** n'est ni 4$^{e}$,ni 2$^{e}$ (2),ni 5$^{e}$,ni 1$^{er}$ ni 3$^{e}$, **il est donc 6$^{e}$,et C est 2$^{e}$**.

**Le classement est Albatros, Corne de brume, Écume des océans, Dents de la mer, Foc la galère et Battant le vent.**

## 3. Il y a un an

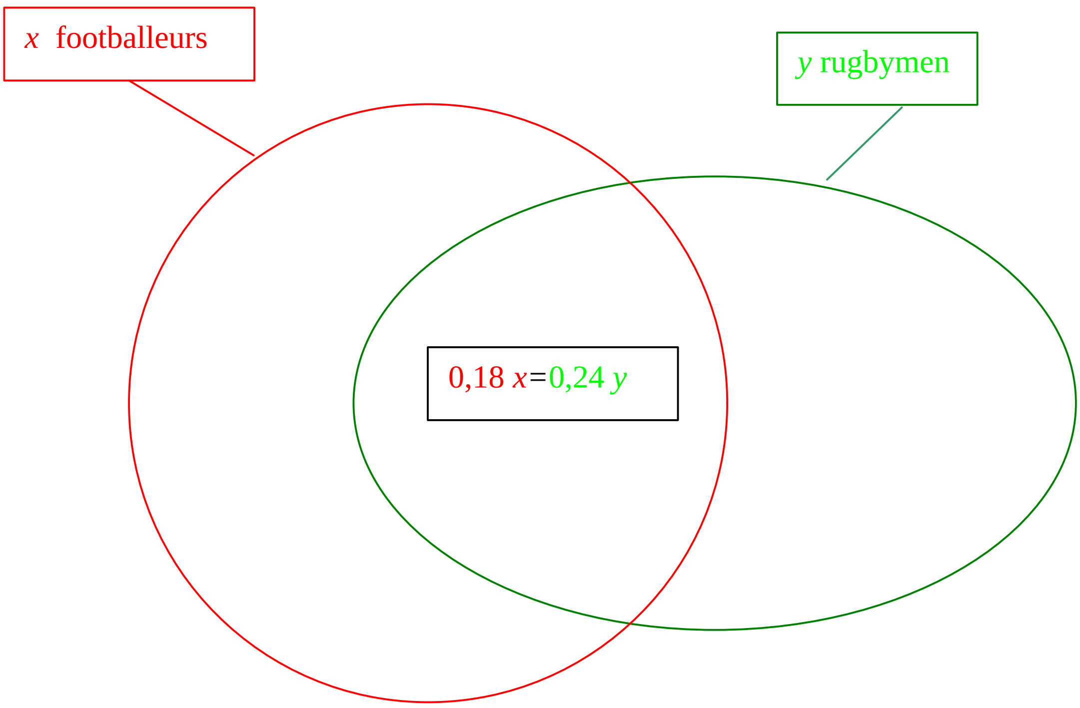
2002 = 1 x 2 x 7 x 11 x 13.

11 et 13 ne peuvent désigner l'heure de naissance qui a eu lieu dans la nuit.
1 (et 2) ne peuvent être raisonnablement le chiffre des unités de l'année de naissance, ce qui supposerait un élève de 3$^{e}$ ou de 2$^{e}$ né en 1991 (1992) ou en 1981 (1982) et donc âgé de 11 (10 )ou de 21 (20) ans.
7 est donc le chiffre des unités de l'année de naissance
13 ne pouvant désigner le numéro du mois, on obtient les trois solutions suivantes.

**Le participant au rallye est né :**
**à 22h le 13/01/1987, ou à 2 h le 13/11/1987 ou à 1 h le 26/11/1987**

## 4. Rond ou ovale

Soit *x* le nombre de footballeurs et *y* le nombre de rugbymen.
Le schéma ci-dessous traduit le problème.




Il y a autant de rugbymen qui jouent au football, que de footballeurs qui jouent au rugby, donc on a $0{,}18\,x=0{,}24\,y$ d'où on déduit que : $\frac{x}{y}=\frac{0{,}24}{0{,}18}=\frac{4}{3}$ et $y=\frac{3}{4}x$.

Le nombre total de participants à l'association sportive est égal à :

$$x+y-0{,}18x \;=\; x+\frac{3}{4}x-0{,}18x=1{,}57\,x$$

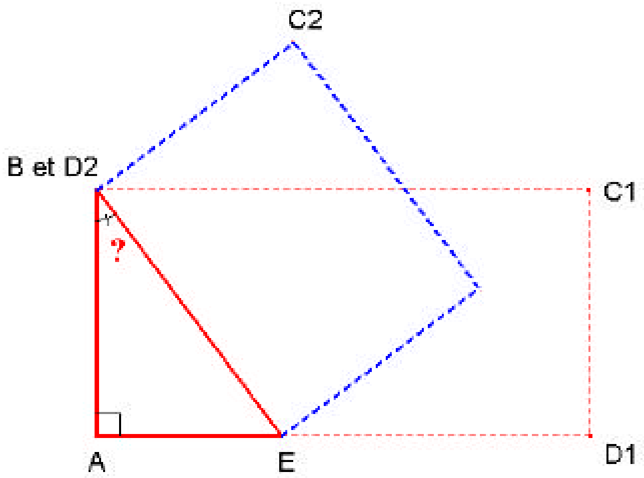
Parmi 1,57 *x* participants, 0,18 *x* pratiquent les deux sports.

$\frac{0{,}18x}{1{,}57x}=\frac{0{,}18}{1{,}57}\approx 0{,}1146$ donc

**Environ 11,5 % des participants pratiquent les deux sports.**

## 5. Garder la face

ABCD est un rectangle deux fois plus long que large.




On pose : AB = $x$ ; AE = $a$ d'après les données on déduit que : BE = DE = $2x - a$

En utilisant la propriété de Pythagore dans le triangle BAE rectangle en A on obtient :
AE² + AB² = BE², on déduit que AE² = BE² – AB²

D'où $a^2 = (2x - a)^2 - x^2$ puis $a = \frac{3}{4}x$

Dans le triangle ABE rectangle en A, on a :

$\tan\left(\widehat{ABE}\right) = \frac{AE}{AB}$

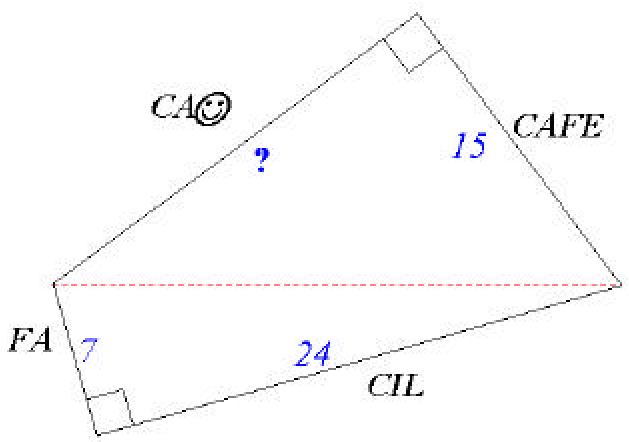
d'où $\tan\left(\widehat{ABE}\right) = \frac{\frac{3}{4}x}{x}$ et $\tan\left(\widehat{ABE}\right) = \frac{3}{4}$

$\widehat{ABE} \approx 36{,}869\,°$

**L'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{ABE}$ est : 36,9°**

## 6. Code secret

FA vaut 1+6 = 7 ; CIL vaut 3+9+12 = 24 et CAFE vaut 3+1+6+5 = 15
Soit $x$ la longueur du côté codé CA☺.




On partage le quadrilatère en deux triangles rectangles de même hypoténuse et on applique le théorème de Pythagore.
On obtient successivement :

$15^2 + x^2 = 7^2 + 24^2$
$x^2 = 49+576 - 225$
$x^2 = 400$

donc $x = 20$
et la lettre ☺ vaut 20 – 3 – 1 c'est-à-dire 16.

**La lettre remplacée par ☺ est P.**

## 7. Nombres croisés

De 6 (12 x 37 = 444) et de (B ; b) on déduit que b = 4. Et l'on obtient facilement :

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | 4 | ■ | | | 9 |
| **2** | 3 | ■ | 1 | | | 9 |
| **3** | | 8 | 6 | ■ | | 9 |
| **4** | | ■ | 3 | 2 | ■ | ■ |
| **5** | | ■ | 8 | | 1 | |
| **6** | 4 | 4 | 4 | ■ | 6 | |

Grâce à **1** : 2a est un nombre de deux chiffres se terminant par 4.
Donc a = 7, ou 12, ou 17 ou 22 ou 27, etc.

Mais d'après **1** : $a^2$ est un nombre de trois chiffres se terminant par 9.
D'où a = 17 ou a = 27 ($7^2 = 49$ et $37^2 = 1369$).

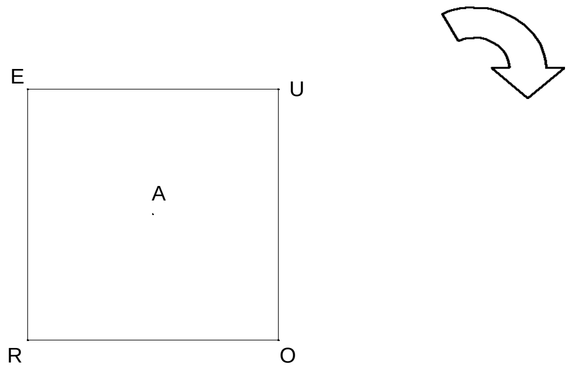
D'après **3**, si a = 27, 28a + 10 = 766 : impossible, car les deux derniers chiffres sont 8 et 6.
Il reste à vérifier que 28 x 17 + 10 (486) convient.

On complète alors sans problème la grille, et on obtient :

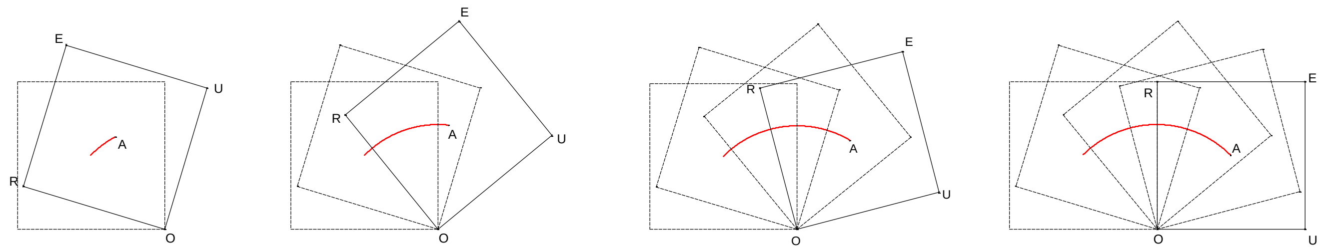
| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 3 | 4 | ■ | 2 | 8 | 9 |
| **2** | 3 | ■ | 1 | 1 | 3 | 9 |
| **3** | 4 | 8 | 6 | ■ | 3 | 9 |
| **4** | 0 | ■ | 3 | 2 | ■ | ■ |
| **5** | 8 | ■ | 8 | 5 | 1 | 7 |
| **6** | 4 | 4 | 4 | ■ | 6 | 8 |

## 8. Et pourtant elle tourne !

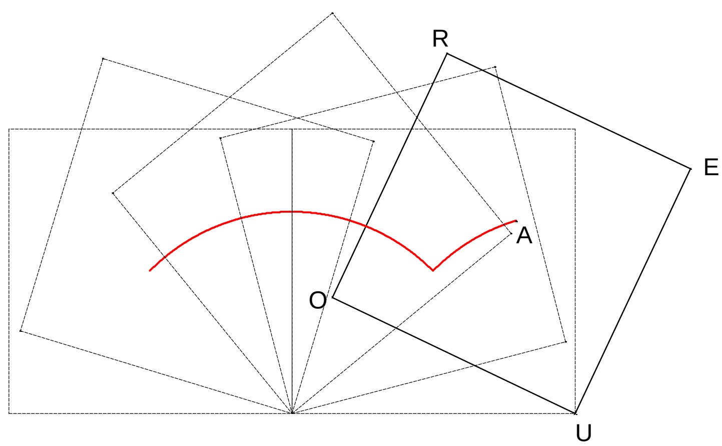
Intéressons nous à cette drôle de brouette, bien peu pratique ...
On peut schématiser cette roue par un carré ROUE dont le centre de symétrie A représente l’axe :

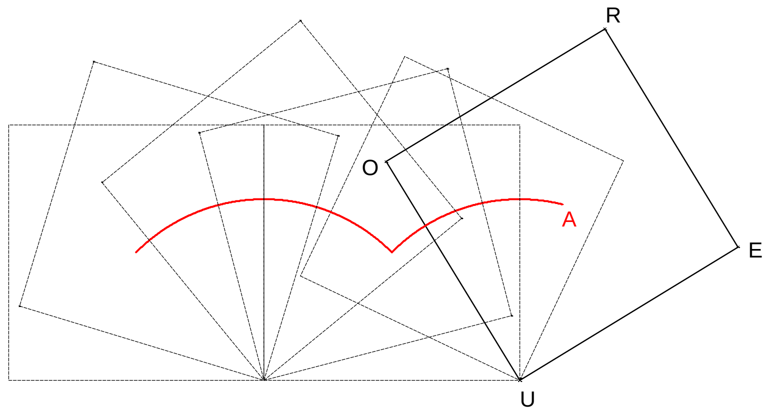


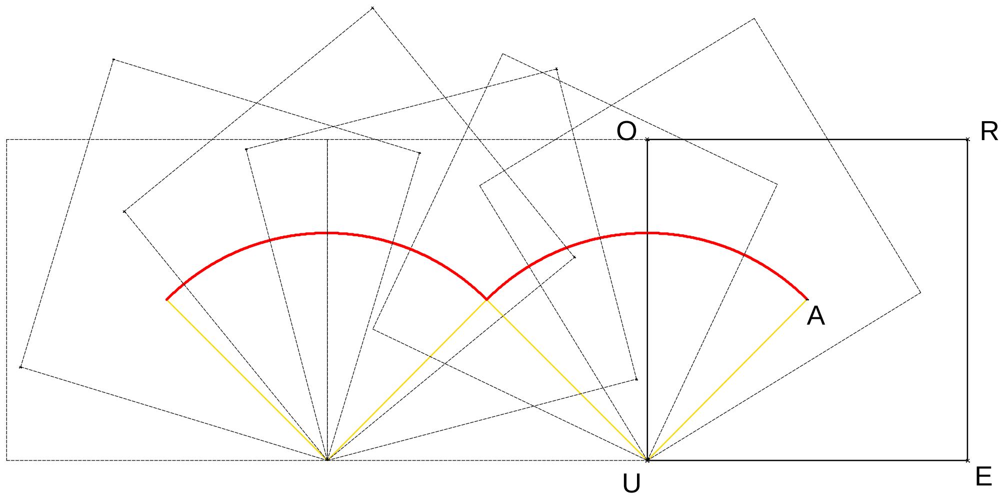

Ce carré a pour côté 40 cm et la demi-diagonale mesure $20\sqrt{2}$ cm.
Lorsque la roue “tourne”, elle décrit d’abord un mouvement circulaire autour de O dans le sens de la flèche, voici les différentes étapes de ce mouvement :




Jusqu’ici, le point A (l’axe de la roue) a suivi une trajectoire circulaire de centre O et de rayon $20\sqrt{2}$ cm en décrivant un angle de 90° autour de O.
A ce stade du mouvement le point U touche le sol et devient le nouveau centre de la rotation.
Voici la suite du mouvement :






On remarque ainsi qu'à chaque quart de tour de la roue, l'axe parcourt un quart d'un cercle de rayon $20\sqrt{2}$ cm.
Après un tour complet de la roue, c'est-à-dire lorsque le point O touchera à nouveau le sol, l'axe A de la roue a parcouru une longueur égale au périmètre d'un cercle de rayon $20\sqrt{2}$ cm.
A chaque tour de roue, l'axe parcourt donc $2\times p \times 20\sqrt{2}$ cm.
Après 100 tours de roue, l'axe aura donc parcouru $4000p\sqrt{2}$ cm, c'est-à-dire approximativement 17771 cm ou 177,71 m. Bozzo le clown s'est donc effectivement trompé !

## 9. Calculateur prodige

On peut remarquer que 2000200120022004 = 2000200120022003 + 1
et que 2000200120022002 = 2000200120022003 – 1

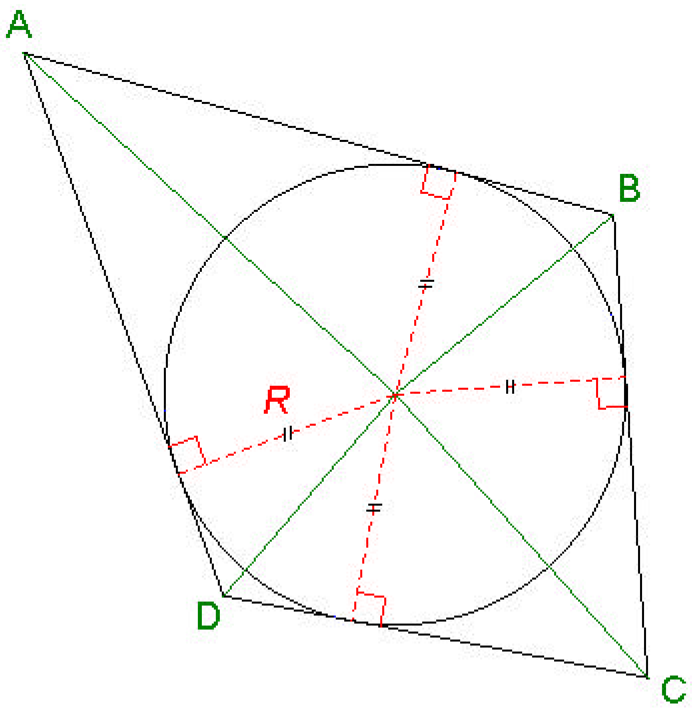
En posant $x = 2000200120022003$ le calcul de Sarah devient : $x^2 - (x + 1)(x - 1)$

De plus, $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$ donc Sarah obtient : $x^2 - ( x^2 - 1)$ c'est-à-dire $x^2 - x^2 + 1$ ou encore 1.

**Le résultat du calcul de Sarah est donc 1.**

## 10.Et p alors

Pour calculer l'aire $A_{ABCD}$ du quadrilatère, on le partage en 4 triangles en joignant le centre du cercle à chacun de ses sommets (voir figure). La hauteur de chaque triangle est égale au rayon $R$ du cercle.




D'où $A_{ABCD} = R \times \frac{\text{AB}}{2} + R \times \frac{\text{BC}}{2} + R \times \frac{\text{CD}}{2} + R \times \frac{\text{DA}}{2}$ et on obtient $A_{ABCD} = R \times \frac{(\text{AB+BC+CD+DA})}{2}$.

Soit $P_{\text{ABCD}}$ le périmètre du quadrilatère, on a $A_{ABCD} = R \times \frac{P_{\text{ABCD}}}{2}$.

D'après le texte le périmètre du quadrilatère est obtenu en multipliant celui du cercle par $\frac{5}{p}$,

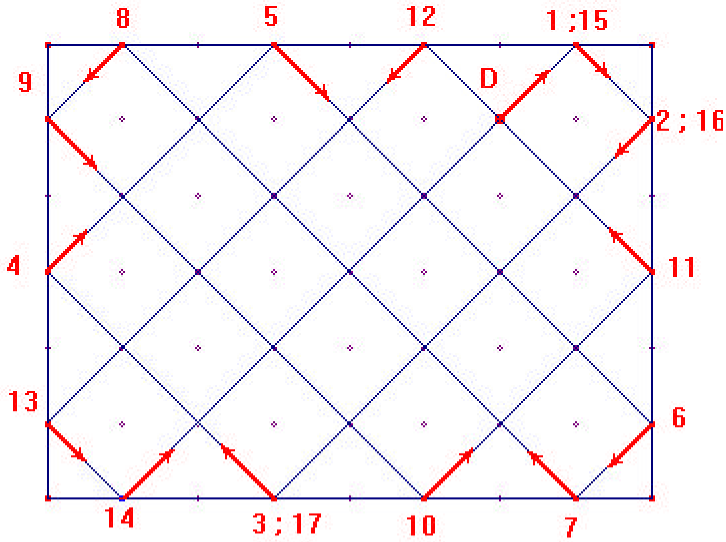
D'où $P_{\text{ABCD}} = \frac{5}{p} \times 2p\ R = 10\ R$ et $A_{ABCD} = 5\ R^2$

Soit $A_{disque}$ l'aire du disque, on a $\frac{A_{ABCD}}{A_{disque}} = \frac{5R^2}{p R^2} = \frac{5}{p}$, d'où $A_{ABCD} = \frac{5}{p} \times A_{disque}$

**On doit aussi multiplier l'aire du disque par $\frac{5}{p}$ pour obtenir celle du quadrilatère.**

## 11.Billard

A l'aide d'un schéma, il est possible de visualiser les premiers rebonds. On s'aperçoit alors que le 15$^{e}$ rebond se produit au même endroit que le 1$^{er}$, et qu'il en sera de même, 14 rebonds ensuite c'est-à-dire pour le pour le 29$^{e}$ …



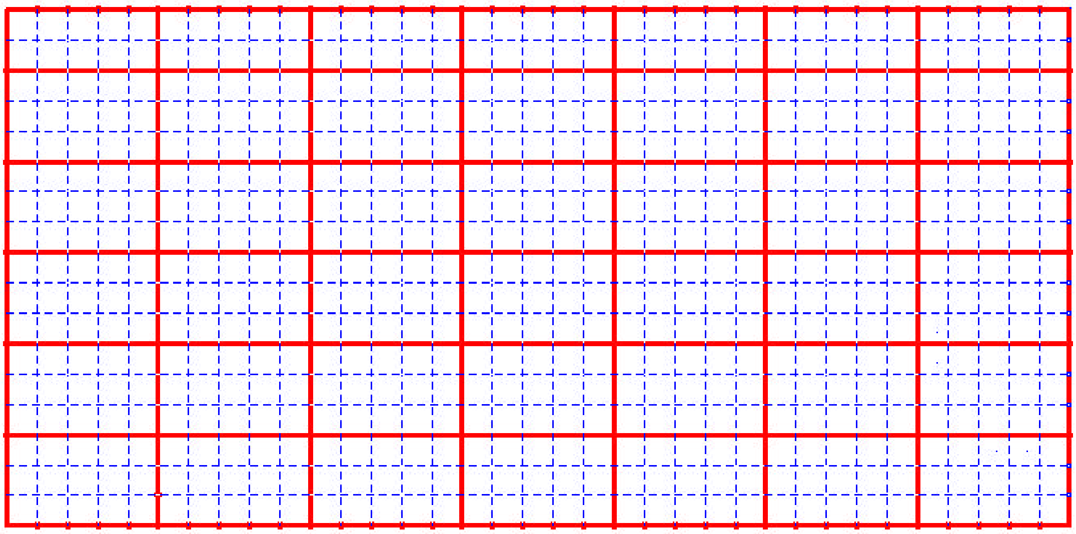

Tous les 14 rebonds le rayon lumineux rebondit au même endroit, comme 2003 = 14 $\times$143 + 1 on peut conclure.

**Au 2003$^{e}$ rebond, le rayon lumineux frappe le billard au point repéré par le nombre 1.**

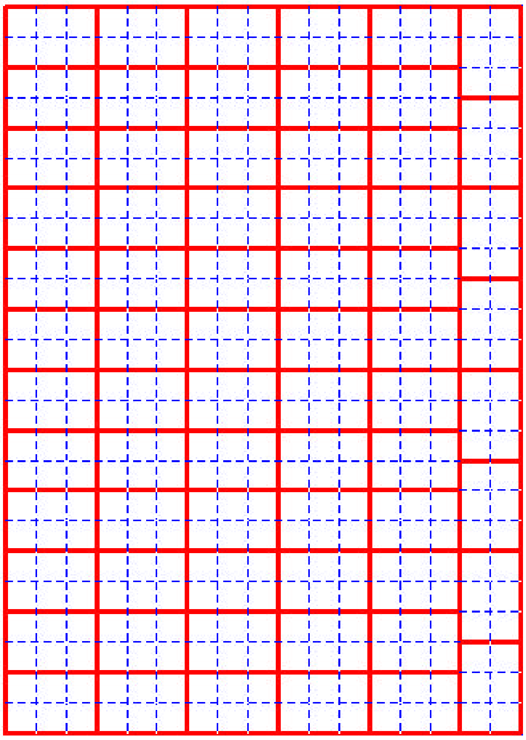
## 12.Qu'est ce ?

**Une disposition possible des caisses est :**

**Une vue de dessus :**



**Une vue de derrière :**



## 13. Le mot juste

Le texte contenait une erreur, en effet à la ligne : « Nom usuel de $10^6$ µm » il n'y a aucune lettre à la bonne place par rapport au mot caché.

| **Définitions** | | | **Mot de 5 lettres** | | | **Nombres de lettres à la bonne place par rapport au mot caché.** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Elle ne se calcule pas en le piquant. | **S** | **O** | **M** | **M** | **E** | **1** |
| Nom usuel de $10^6$ µm. | **M** | **E** | **T** | **R** | **E** | **0** |
| Est égal à $\left(2\sqrt{5}\right)^2$. | **V** | **I** | **N** | **G** | **T** | **2** |
| Peut se mesurer en degrés. | **A** | **N** | **G** | **L** | **E** | **0** |
| Bon ou mauvais, avec lui les nombres deviennent relatifs. | **S** | **I** | **G** | **N** | **E** | **2** |
| Dans un triangle rectangle, deux angles sur trois le sont. | **A** | **I** | **G** | **U** | **S** | **3** |

**Avec la modification de texte, le mot cherché est : S I N U S.**

## 14. Primath

Une méthode consiste à rechercher successivement A et B puis C, D, E, F et G.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | **G** | |
| | **149** | **F** | |
| | **A** | **B** | **E** |
| **C** | **41** | **D** | **53** |

1. **Recherche de A et B :**

❖ On sait que :

A et B sont des **nombres premiers** tels que **A + B + 1 = 149.**

Avec : C + 41 + 1 = A          D + 41 + 1 = B          C et D premiers.

❖ On commence par établir la liste des nombres premiers inférieurs à 149, par exemple en reproduisant la méthode du crible d'Eratosthène.

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97 ; 103 ; 107 ; 109 ; 113 ; 131 ; 137 et 139 sont les valeurs possibles de A et B.

❖ Comme C et D sont strictement positifs, **A et B sont strictement supérieurs à 41.**
Les valeurs possibles de A et B restantes sont donc :

43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97 ; 103 ; 107 ; 109 ; 113 ; 131 ; 137 et 139

**avec B = 149 – A– 1**

| A | 43 | 47 | 53 | **59** | 61 | 67 | 71 | 73 | 79 | 83 | **89** | 97 | 107 | 109 | 113 | 131 | 137 | 139 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B = 149 – A– 1 | 105 | 101 | 95 | **89** | 87 | 81 | 77 | 75 | 69 | 65 | **59** | 51 | 41 | 39 | 35 | 17 | 11 | 9 |

Donc :          **A = 59 et B = 89**          ou          **A = 89 et B = 59**

2. **Calcul de C, D, E, F et G.**

❖ Première possibilité : **A = 59 et B = 89**

On a          C = A – 41 – 1          et          D = B – 41 – 1

Soit :          C = 17          et          D = 47

17 et 47 sont premiers. Sont-ils des primates ?

| | | |
|---|---|---|
| | $17 = 1 + 3 + 13$ | et | $47 = 1 + 3 + 43$ |

Ces valeurs peuvent convenir .

On a alors : $E = D + 53 + 1 = 47 + 53 + 1 = 101$ — 101 est un nombre premier, il peut convenir.

$F = E + B + 1 = 101 + 89 + 1 = 191$ — 191 est un nombre premier, il peut convenir**.**

$G = 149 + F + 1 = 149 + 191 + 1 = 341.$ — Mais $341 = 11 \times 31$.

**341 n'est pas premier, cette solution n'est pas valide.**

❖ Deuxième possibilité : **A = 89 et B = 59**

On a $C = A - 41 - 1$ et $D = B - 41 - 1$

Soit : $C = 47$ et $D = 17$

D'où: $E = D + 53 + 1 = 17 + 53 + 1 = 71$ — 71 est un nombre premier, il peut convenir.

$F = E + B + 1 = 71 + 59 + 1 = 131$ — 131 est un nombre premier, il peut convenir.

$G = 149 + F + 1 = 149 + 131 + 1 = 281.$

On vérifie facilement que 281 est bien un nombre premier.

La solution est donc :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 281 | | |
| | 149 | 131 | |
| 89 | 59 | 71 | |
| 47 | 41 | 17 | 53 |