

Une solution du rallye maths 2004

Afin de réduire un peu la longueur de ce document certains calculs ou raisonnements n'ont pas été détaillés. Contactez-nous pour toute question.

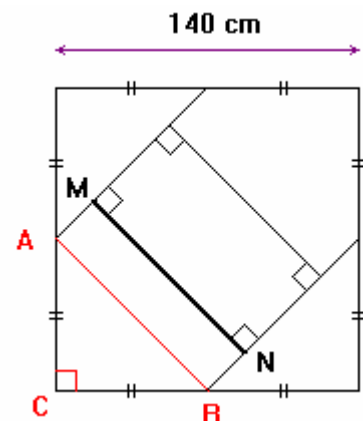
1. Table des carrés

AMNB est un rectangle donc $MN = AB$


Dans le triangle rectangle ABC, on peut appliquer le théorème de Pythagore: $AB^2 = AC^2 + CB^2$

donc $AB^2 = 70^2 + 70^2 = 9\ 800$ d'où $AB = \sqrt{9800} \approx 98,99$ cm

L'arrondi à l'unité de la longueur de la traverse est 99 cm.



2 Vertige d'un soir

Avant le pont	Personnes qui traversent	Après le pont	Durée	Total
Joël Julie	 Bob et Sarah		50 s	50 s

Joël Julie	← Bob	Sarah	30 s	80 s
Bob	→ Joël Julie	Sarah	150 s	230 s
Bob	← Sarah	Joël et Julie	50 s	280 s
	→ Bob et Sarah	Joël, Julie, Bob et Sarah	50 s	330 s soit 5 min 30 s

3 La Mar-Mat

Cela revient à transformer le nombre 1 en 2003 ou en 2004 en un minimum d'opérations (+1 ou $\times 2$). Pour cela, il suffit de raisonner à rebours : transformer 2003 ou 2004 en 1 en un minimum d'opérations (- 1 ou $\div 2$). Comme la division par 2 est « plus rapide », on doit l'appliquer dès que cela est possible, c'est-à-dire sur les nombres pairs, dans le cas contraire on utilise la soustraction par 1 pour rendre le nombre pair.

En commençant par 2004 :

2004-1002-501-500-250-125-124-62-31-30-15-14-7-6-3-2-1 (16 opérations)

En commençant par 2003 :

2003-2002-1001-1000-500-250-125-124-62-31-30-15-14-7-6-3-2-1 (17 opérations)

Le chemin gagnant est donc : 1-2-3-6-7-14-15-30-31-62-124-125-250-500-501-1002-2004 (16 coups)

4 Faites vos jeux

Première étape :

Le gain de 3 125 € ne peut être attribué qu'à Vincent (nombre trop grand pour être associé à 3 ; 4 ou 5 € ; et trop petit pour 1 €)

$3125 \times 2 = 6250$; il reste 3365.

Deuxième étape :

625 doit être associé à 5 (un autre nombre associé à 625 ne permet pas d'obtenir un résultat suffisant)

$625 \times 5 = 3125$; il reste 240.

Troisième étape :

125 ne peut être associé qu'à 1 € ; il reste 115.

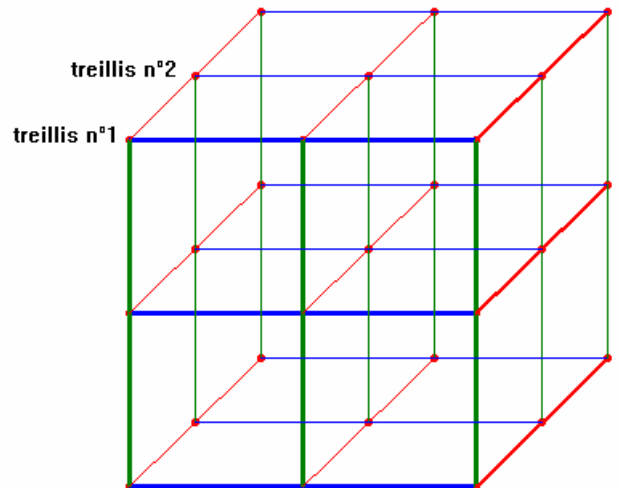
Quatrième étape :

Afin de conclure, il reste à associer 25 et 5 avec 3 et 4.

Résultat final : $125 \times 1 + 3125 \times 2 + 5 \times 3 + 25 \times 4 + 625 \times 5 = 9615$ euros

5 jouer avec des allumettes

A l'aide de la représentation ci-dessus, on peut faire un raisonnement afin de trouver une formule qui permet de dénombrer le nombre total d'allumettes utilisées en fonction du nombre de cubes élémentaires.



Soit n^3 le nombre de cubes élémentaires.

ici un « grand cube » formé de 2^3 cubes

(n étages de n rangées de n cubes)

1. Dénombrement du nombre d'allumettes qui constituent un « treillis » (face avant)

Horizontalement, Il y a $(n+1)$ lignes de n allumettes chacune soit $n(n+1)$ allumettes représentées en trait épais bleu.

De la même façon il y a aussi $n(n+1)$ allumettes verticales représentées en trait épais vert.

Dans un treillis il y a donc $2n(n+1)$ allumettes.

2. Il y a dans toute la construction $(n+1)$ treillis (voir dessin) ; c'est à dire $2n(n+1)^2$ allumettes sans compter les « allumettes fuyantes » représentées en trait rouge sur le dessin et qui relient les différents treillis.

3 a. Comptons le nombre de fuyantes visibles sur la face de droite représentées en trait épais rouge :

il y a $(n+1)$ lignes de n allumettes chacune, c'est-à-dire $n(n+1)$ allumettes.

b. Il y a $(n+1)$ couches identiques à la précédente.

Le nombre total de fuyantes est : $n(n+1)^2$

4. Conclusion :

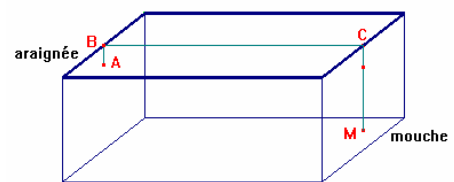
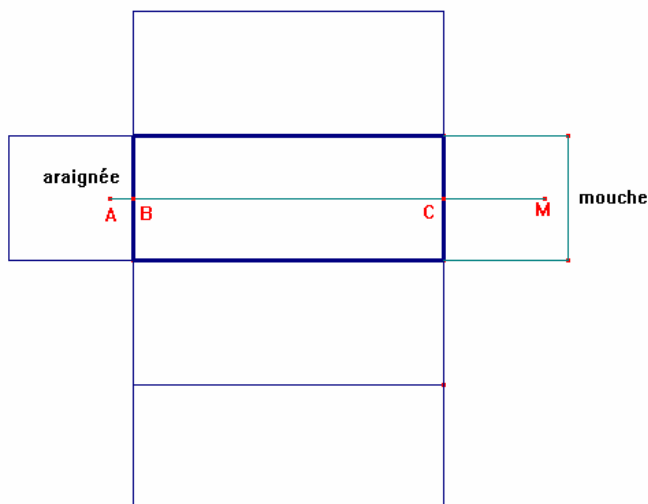
Dans un grand cube composé de n cubes élémentaires, il y a en tout $3n(n+1)^2$ allumettes.

Si $n = 10$ Il y a $3 \times 10 \times 11^2$ allumettes c'est à dire 3 630 allumettes.

6 prendre la mouche

Chacun sait que la ligne droite est le plus court chemin, l'idée habituelle consiste à utiliser un patron et à raisonner dans le plan.

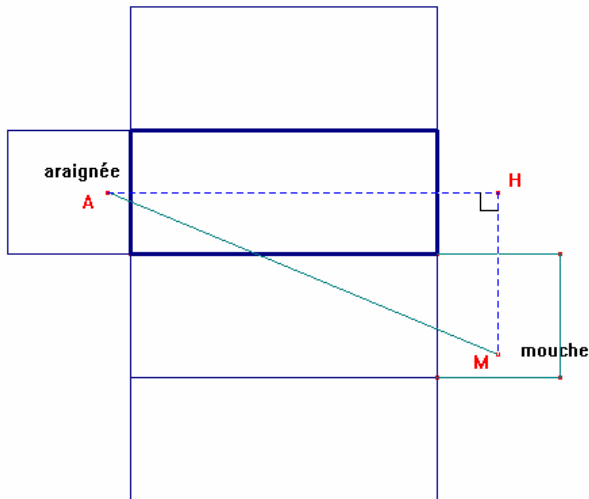
Ainsi on peut envisager le patron suivant :



$$AB = 1 ; BC = 30 \text{ et } CM = 11 \text{ donc } AM = 42$$

Ceci ne répond pas à la consigne du texte !

Pour chercher une autre solution, il faut envisager un autre patron du parallélépipède :



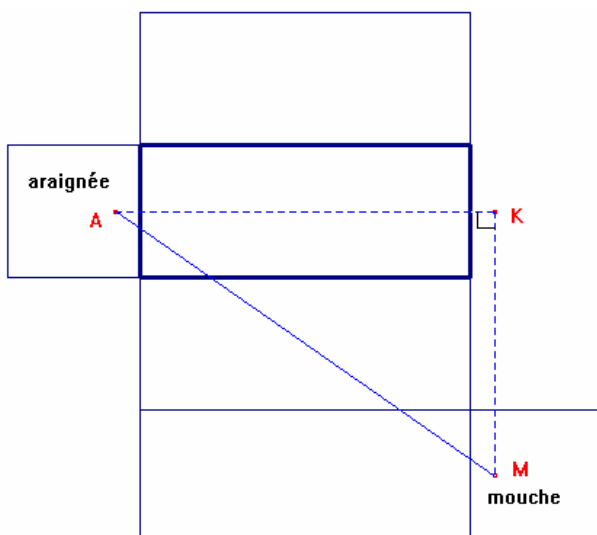
Cette fois [AM] est l'hypoténuse du triangle rectangle AHM avec AH = 37 et HM = 17

L'utilisation du théorème de Pythagore nous permet de déterminer AM.

On obtient $AM = \sqrt{1658}$ d'où $AM \approx 40,72$

En suivant ce chemin l'araignée mettra moins de 41 secondes pour atteindre la mouche et la dévorer !

On peut encore essayer d'optimiser le trajet en utilisant un nouveau patron :



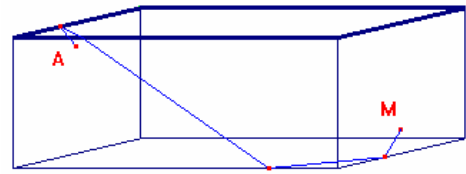
Ici [AM] est l'hypoténuse du triangle rectangle AKM avec AK = 32 et KM = 24

L'utilisation du théorème de Pythagore nous permet de déterminer AM.

On obtient $AM = \sqrt{1600}$ d'où $AM=40$

En suivant ce chemin l'araignée ne mettra que 40 s pour atteindre la mouche et la dévorer !

En repliant le patron ci-dessus, on peut visualiser le chemin parcouru par l'araignée sur les faces du parallélépipède :



7 A côté de la plaque !

Parmi les plaques qui commencent par A:

1) Dénombrons les plaques qui ont 1 seule lettre à la fin :

Pour chaque lettre, il y en a 999 différentes, donc il y en a 26×999 en tout.

2) Dénombrons les plaques qui ont 2 lettres à la fin :

Il y a 26×26 couples de lettres différentes et pour chaque couple de lettres, il y a 999 plaques différentes, donc il y a $26 \times 26 \times 999$ plaques en tout.

3) Dénombrons toutes ces plaques:

$$26 \times 999 + 26 \times 26 \times 999 = 27 \times 26 \times 999 = 701298$$

La plaque A999ZZ est la 701298^{ème} plaque.

8 Un roc cornu

EULER est né en 1707, la partie entière du nombre cherché est donc comprise entre 1707 et 1747.

Le nombre palindrome est de la forme : $17ab,ba71$.

1. Si la somme des deux entiers : $17ab$ et $ba71$ est divisible par 9, $1+7+a+b+b+a+7+1$ (soit $2(1+7+a+b)$) l'est, et $1+7+a+b$ l'est.

Les seules possibilités pour la partie entière sont : 1710, 1719, 1728, 1737 et 17460.

2. La somme $17ab+ba71$ étant divisible par 12, elle doit être paire. On en conclut que b est impair ($b+1$ pair).

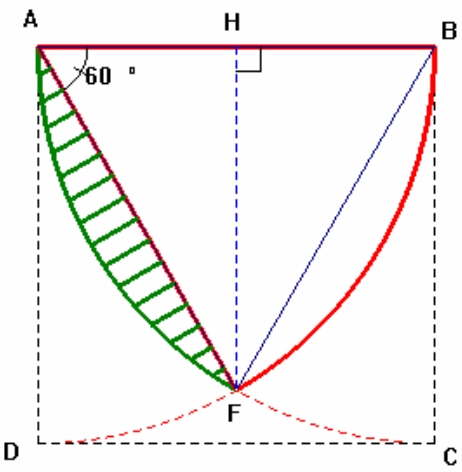
Il reste donc comme possibilités : 1719 et 1737.

3. Il suffit maintenant de calculer les deux sommes : $1719+9171=10890$ et

$1737+7371=9108$ pour éliminer 1719 qui donne une somme non-divisible par 4 et donc par 12.

La solution est : $1737,7371$.

9. Blason

	<p>Chacun des 3 côtés du triangle ABF mesure 80 cm, ce triangle est donc équilatéral et on en déduit que</p> $\hat{BAF} = 60^\circ$ <p>Le blason est constitué de 2 morceaux :</p> <ul style="list-style-type: none">• Le morceau 1 qui est un sixième de disque de rayon 80 cm ;• Le morceau 2 qui est hachuré sur la figure ci-contre.
---	---

$$\text{Aire du morceau 1} = \frac{\pi \times 80^2}{6} \text{ cm}^2$$

Aire du morceau 2 = Aire du morceau 1 – Aire du triangle équilatéral BAF

$$\text{Aire de } BAF = \frac{AB \times HF}{2}$$

et à l'aide du théorème de Pythagore ou $\sin(\hat{BAF})$ on peut calculer FH .

$$\text{On obtient } FH = 40\sqrt{3} \text{ cm et Aire de } BAF = 1600\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{D'où Aire du blason} = 2 \times \frac{\pi \times 80^2}{6} - 1600\sqrt{3} \approx 3930,78 \text{ cm}^2$$

10 Escalier mécanique et gens pressés

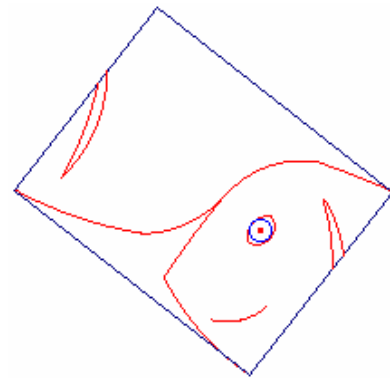
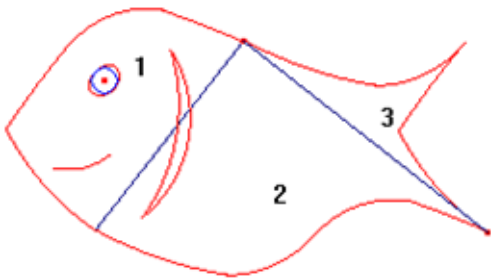
Jean qui a monté 4 marches de moins met 6 secondes de plus, chaque marche nécessite donc 1,5 secondes.

En se laissant porter par l'escalier et sans monter de marche Pierre aurait mis $48 + 12 \times 1,5 = 66$ secondes,

(de même Jean aurait mis $54 + 8 \times 1,5 = 66$ secondes).

$66 \div 1,5 = 44$ On déduit que l'escalier mécanique comprend 44 marches.

11 Le poisson pané



Sans commentaires !

12 Auto-logique

Les seules nombres auto-logiques (autres que 2020) sont :

1210 ; 21200 ; 3211000 ; 42101000 ; 521001000 et 6210001000.

13 La leçon de piano

$$2004 = 14 \times 143 + 2$$

Gwendoline joue 143 fois la même série de 14 notes puis 2 notes : DO puis RE.

La 2004^{ème} note est un **RE**

14 Ah les vaches !

Chacun doit avoir le même nombre de veaux soit 20 chacun.

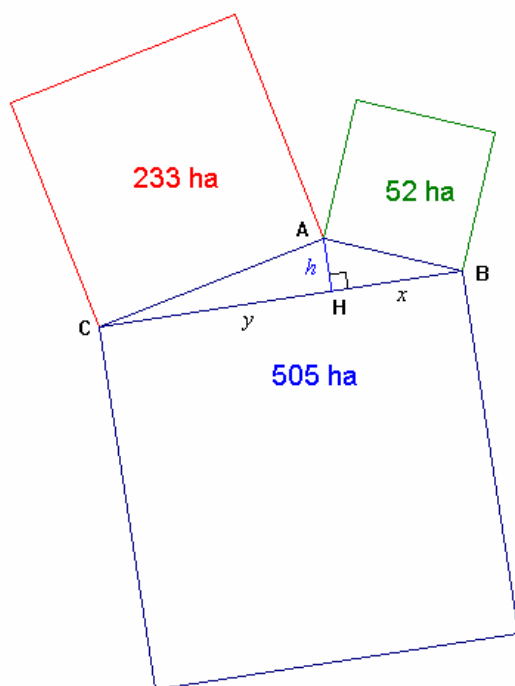
On doit trouver les combinaisons possibles pour que $r + 3b + 2n = 20$;

r est le nombre de vaches rousses, b de vaches blanches, n de vaches noires.

	Nombre de vaches rousses	Nombre de vaches blanches	Nombre de vaches noires	Nombre total de veaux
	4	4	2	$4 + 4 \times 3 + 2 \times 2 = 20$
	3	3	4	$3 + 3 \times 3 + 4 \times 2 = 20$
	3	3	4	$3 + 3 \times 3 + 4 \times 2 = 20$
Nombre total de vaches	10	10	10	

15 La mare

On note ABC le champ triangulaire, H le pied de la hauteur issue de A, $BH = x$, $HC = y$, et $AH = h$



$$BC^2 = 505 \text{ donc } (x + y)^2 = 505.$$

$$\text{Comme } x + y \text{ est positif on a } x + y = \sqrt{505}$$

$$\text{On déduit } y = -x + \sqrt{505}$$

$$\text{En élevant au carré on a } y^2 = 505 - 2x\sqrt{505} + x^2 \text{ et on déduit que } y^2 - x^2 = 505 - 2x\sqrt{505} \text{ . (1)}$$

$$AC^2 = 233, \text{ en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle CAH on obtient } y^2 + h^2 = 233 \text{ (2)}$$

$$\text{De même on obtient } x^2 + h^2 = 52 \text{ (3)}$$

En soustrayant membre à membre les deux égalités (2) et (3) précédentes on obtient $y^2 - x^2 = 181$ (4)

De (1) et (4) on déduit $181 = 505 - 2x\sqrt{505}$ d'où $x = \frac{162}{\sqrt{505}}$ et $x^2 = \frac{26244}{505}$ (5)

En utilisant (1) et (5), on obtient $h^2 = 52 - \frac{36244}{505}$ d'où $h^2 = \frac{16}{505}$

Soit A l'aire du triangle BAC, $A = \frac{h(x+y)}{2}$ donc $A^2 = \frac{h^2(x+y)^2}{4}$

$$A^2 = \frac{505 \times \frac{16}{505}}{4} \quad A^2 = 4 \text{ donc } A = 2$$

L'aire de la mare est égale à 2 hectares.