

# XIV<sup>e</sup> Rallye mathématique d'Aquitaine

Mardi 22 mars 2005

## Une correction

- [1\) Complètement chocolat !](#)
- [2\) Carton plein](#)
- [3\) Casse-tête](#)
- [4\) Quel beau métier professeur!](#)
- [5\) Comme scie, comme ça !](#)
- [6\) Mars Attack](#)
- [7\) C'est le jeu ma petite Lucette !](#)
- [8\) Pense-bête.](#)
- [9\) Sacré millésime !](#)
- [10\) Rcade et olivier](#)
- [11\) Y'a pas de meuh !](#)
- [12\) A faire tourner les têtes pensantes.....](#)
- [13\) Les sourcils du clown](#)
- [14\) Fourmi-diable](#)
- [15\) Le poinçonneur des lilas](#) (sujet spécial seconde professionnelle)
- [16\) Soirée « Disco »](#) (sujet spécial seconde générale et technologique)

### 1) Complètement chocolat !

Tracer les segments [IK], [KJ], [IJ], [AJ], [BQ] et [CR]. Il y a 8 triangles rectangles superposables, 5 blancs et 3 noirs.

D'où le calcul :

$$\frac{15}{5} \times 3 = 9$$

Il devra prévoir 9 Kg de chocolat noir.

## 2) Carton plein

Sachant qu'il y a eu 90 cartons distribués, à raison de 2 par match, cela signifie qu'il y a eu 45 matchs.

1 équipe au tournoi donnera 0 match (0)

2 équipes donneront 1 match (1)

3 équipes donneront 3 matchs (2+1)

4 équipes donneront 6 matchs (3+2+1)

5 équipes donneront 10 matchs (4+3+2+1)

6 équipes donneront 15 matchs (5+4+3+2+1)

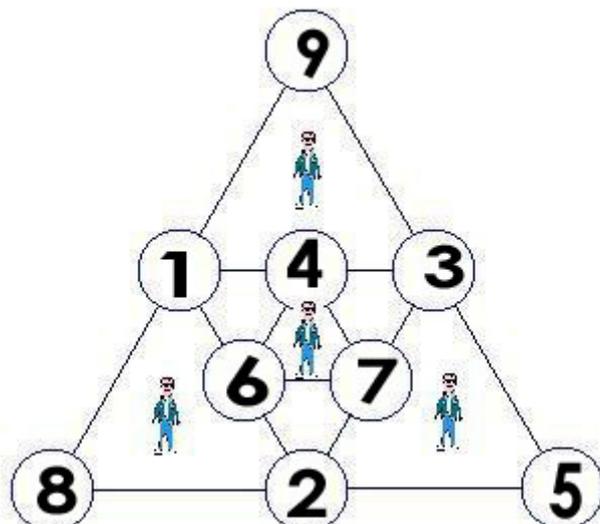
...

10 équipes donneront 45 matchs (9+8+7+6+5+4+3+2+1)

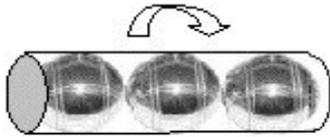
Il y a donc eu 10 équipes à ce tournoi.

## 3) Casse-tête

4)



Quel beau métier professeur!



Soit  $r$  le rayon des boules de pétanque.

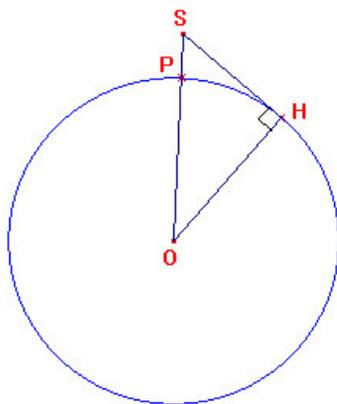
La longueur de l'étui est donc  $6r$

La circonférence de l'étui est  $2\pi r$ .

Comme  $2\pi r > 6r$ , l'étiquette la plus longue pourra être collée autour du cylindre.

### 5) Comme scie, comme ça !

A chaque découpe de la plaque de métal, la longueur de la partie à affûter ne change pas, elle vaut toujours 2 mètres.



### 6) Mars Attack

H représente la pierre et S symbolise le laser.

On sait que  $SP=1,65\text{m}$  ;  $SH=3348\text{m}$  et que (SH) est tangente au cercle.

On cherche OP (ou OH).

Dans le triangle SHO rectangle en H, d'après le théorème de

Pythagore, on a:

$$OS^2 = SH^2 + HO^2$$

$$(OP+1,65)^2 = 3348^2 + OP^2$$

$$OP^2 + 2 \times 1,65OP + 1,65^2 = 3348^2 + OP^2$$

Donc  $2 \times 1,65OP + 1,65^2 = 3348^2$

Donc  $OP = (3348^2 - 1,65^2) / 3,3 = 3396697,357 \text{ m} \approx 3397\text{km}$

Le rayon de Mars mesure environ 3397km.

**7) C'est le jeu ma petite Lucette !**

Le père frise la quarantaine donc on peut supposer qu'il a 39 ans (38 ans est aussi accepté mais cela ne change pas le raisonnement suivant)

Si on écrit 3 fois son âge à la suite, cela donne le nombre 393 939.

Or  $393\ 939 = 39 \times 10\ 000 + 39 \times 100 + 39 \times 1 = 39 \times (10\ 000 + 100 + 1) = 39 \times 10\ 101 = 39 \times 37 \times 13 \times 7 \times 3 \times 1$

Les 5 nombres à cocher sont : **39 ; 37 ; 13 ; 7 ; 3 ; 1** ou 38 ; 37 ; 13 ; 7 ; 3 ; 1

**8) Pense-**

- 1: 06992
- 2: 63072
- 3: 33754
- 4: 04211
- 5: 42101
- 6: 21113
- 7: 10021
- 8: 10210
- 9: 12111
- 10: 11000
- 11: 01001
- 12: 11011
- 13: 01100
- 14: 10100
- 15: 11101
- 16: 00110
- 17: 01010
- 18: 11110
- 19: 00011
- 20: 00101
- 21: 01111
- 22: 10001
- 23: 10010
- 24: 10111
- 25: 11000
- 26: 01001
- 27: 11011
- 28: 01100
- 29: 10100
- 30: 11101

	10	20	30	40
<del>1</del>	11	21	31	41
2	12	22	32	42
<del>3</del>	<del>13</del>	23	33	43
4	14	24	34	44
5	15	25	35	45
6	16	26	36	46
<del>7</del>	17	27	<del>37</del>	47
8	18	28	38	48
9	19	29	<del>39</del>	49

bête.

A partir de la 10<sup>ème</sup> ligne il se crée une série de 15 nombres qui se répètent.

En enlevant les 9 premières lignes, on obtient:

$$2005 - 9 = 1996$$

En calculant le nombre de série de 15 nombres que l'on peut rentrer dans 1996, on obtient:

$$1996 = 15 \times 133 + 1$$

Il faut donc regarder le nombre situé sur la première ligne de cette série.

Ainsi le code de Pierre inscrit sur la 2005<sup>ème</sup> ligne est **11000**

(il est très facile de retrouver ce code en rentrant les formules dans un tableur...)

## 9) Sacré millésime !

Soit  $x$  le plus grand et  $y$  le plus petit entier cherché.

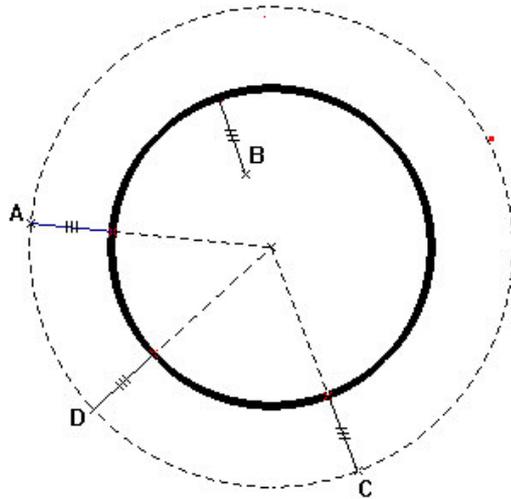
On sait que  $x^2 - y^2 = 2005$  d'où  $(x + y)(x - y) = 2005$

Les seuls diviseurs de 2005 sont 1, 5, 401 et 2005.

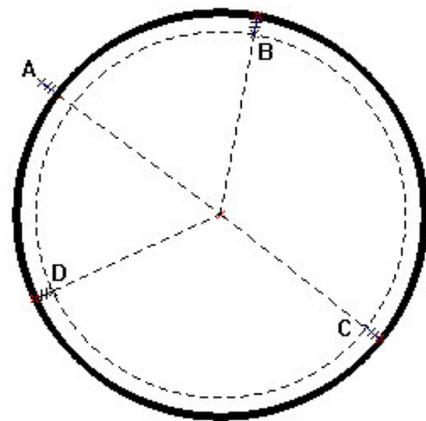
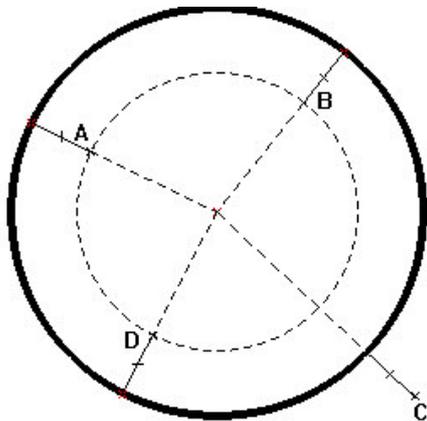
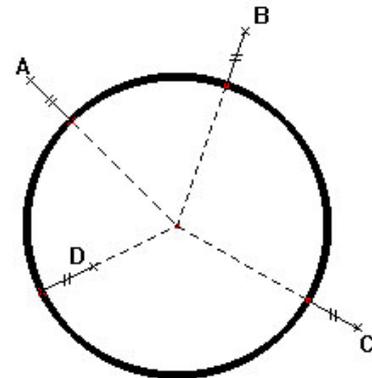
Comme  $x - y \neq 1$ , on a  $x + y = 401$  et  $x - y = 5$

On résout le système d'équations et on trouve :  $x = \mathbf{203}$  et  $y = \mathbf{198}$ .

## 10) Rocade et olivier



Projet de rocade



Pour tracer une rocade :

- On choisit 3 points parmi A, B, C et D.
- On construit le cercle circonscrit à ces trois points. On note O son centre.
- On trace ensuite un segment reliant le 4<sup>e</sup> point au cercle (la droite portée par ce segment doit passer par O)
- On construit le milieu I de ce segment
- On construit le cercle de centre O et passant par I : c'est la rocade recherchée.

La rocade proposée par le bureau d'étude a le plus petit rayon donc c'est bien la plus courte.

## 11) Y'a pas de meuh !

Les personnes interrogées se divisent en 4 catégories :

Catégorie L : ceux qui n'utilisent que du lait Liquide

Catégorie P : ceux qui n'utilisent que du lait en Poudre

Catégorie D : ceux qui utilisent les Deux (427 personnes)

Catégorie R : ceux qui n'utilisent Rien.

Si  $x$  désigne le nombre de personnes interrogées, on peut écrire que  $\frac{1}{3}x$  représente le nombre de personnes dans les catégories L et R. Ainsi le nombre de personnes de la catégorie L est

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x = \frac{2}{15}x$$

De même  $\frac{2}{7}x$  est le nombre de personnes dans les catégories P et R.

Ainsi le nombre de personnes de la catégorie P est

$$\frac{2}{7}x - \frac{1}{5}x = \frac{3}{35}x$$

Par conséquent, comme la somme des 4 effectifs est égale à l'effectif total, on peut écrire :

$$\frac{2}{15}x + \frac{3}{35}x + 427 + \frac{1}{5}x = x$$

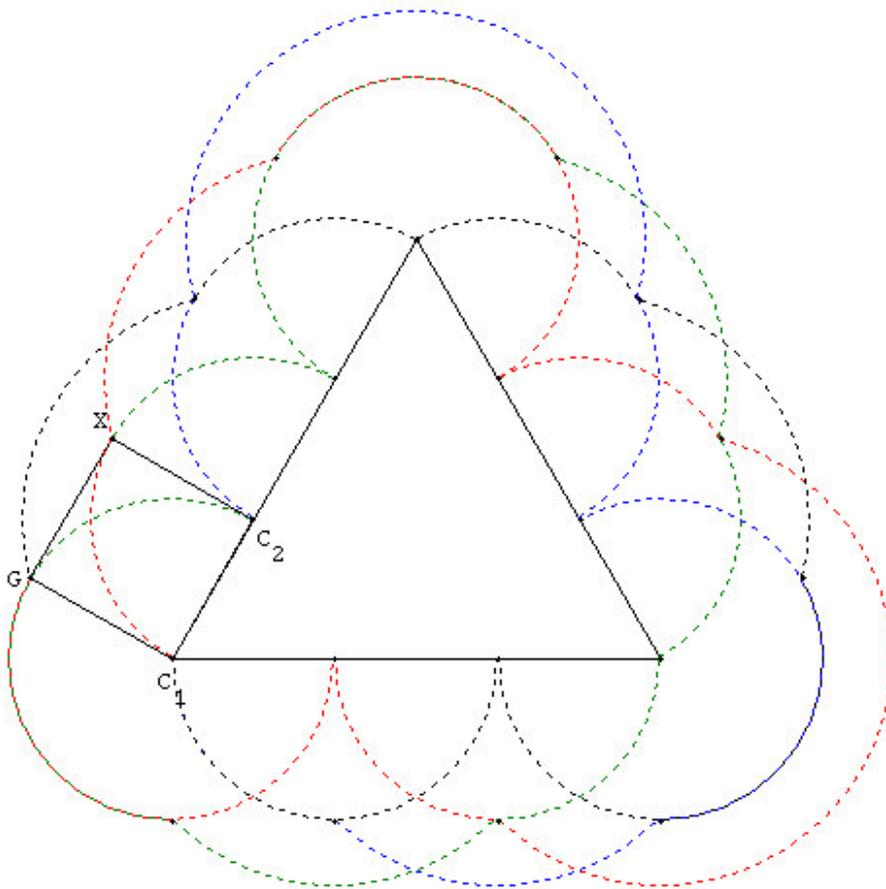
Ce qui donne, après résolution,  $x = 735$  qui est le nombre de personnes interrogées.

Autre raisonnement possible :

On recherche un nombre entier supérieur à 427 qui est divisible par 3, par 5 et par 7. Donc c'est un multiple de 105 : 105 ; 210 ; 315 ; 420 ; 525 ; 630 ; 735 ; 840 ; 945 etc.

En testant, **735** est le seul nombre qui convient.

## 12) A faire tourner les têtes pensantes.....



La trajectoire de Xavier est représentée:

en vert pour le 1<sup>er</sup> tour

en bleu pour le 2<sup>ème</sup> tour

en rouge pour le 3<sup>ème</sup> tour

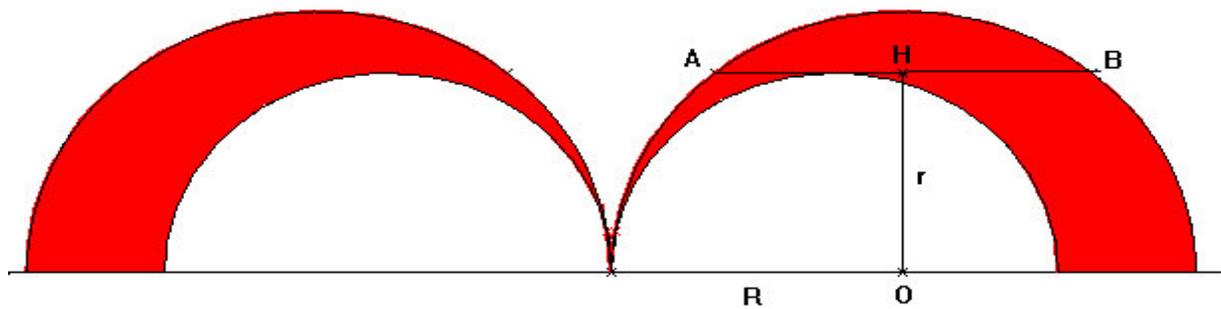
en noir pour le 4<sup>ème</sup> tour

Et on revient au point de départ dans la position initiale exactement.

4 tours sont donc nécessaires.

On pourrait aussi s'amuser à calculer la longueur de la trajectoire de Xavier...

### 13) Les sourcils du clown



Soient R le rayon du grand demi-cercle (qui est égal à AO) et r celui du petit (qui est égal à OH).

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AHO rectangle en H :

$$AO^2 = AH^2 + HO^2$$

$$D'où R^2 = 2^2 + r^2 \text{ d'où } R^2 - r^2 = 4$$

$$\text{Donc l'aire de la surface à maquiller est : } \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 4 \pi \text{ cm}^2$$

#### 14) Fourmi-diable

$a, b, c, d, e$  et  $f$  désignent les nombres de rangées respectifs des escadrons A, B, C, D, E et F. Ce sont évidemment des nombres entiers naturels. Ainsi, par exemple, l'escadron C comporte au total  $c^2$  fourmis.

On peut écrire grâce à la stratégie de la reine :

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ (l'escadron C est formé des escadrons A et B)}$$

$$d^2 = c \text{ (la dernière rangée de l'escadron C forme un escadron D)}$$

$$d^2 = e^2 + f^2 \text{ (l'escadron D forme deux escadrons E et F)}$$

$$e + f = 23 \text{ (la dernière rangée des escadrons E et F survivent, soit 23 fourmis)}$$

il suffit d'étudier chaque possibilité pour  $e$  et  $f$ .

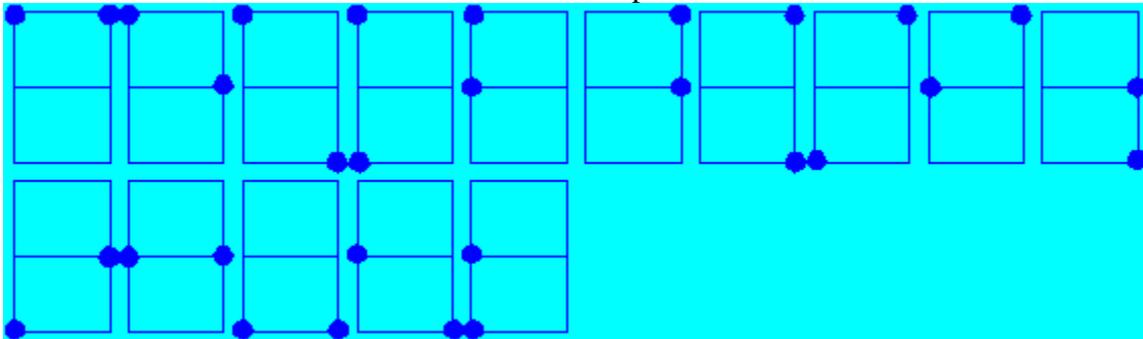
e	f	e <sup>2</sup>	f <sup>2</sup>	e <sup>2</sup> +f <sup>2</sup>	d		c=d <sup>2</sup>	c <sup>2</sup>
1	22	1	484	485	22,02	Non		
2	21	4	441	445	21,1	Non		
3	20	9	400	409	20,22	Non		
4	19	16	361	377	19,42	Non		
5	18	25	324	349	18,68	Non		
6	17	36	289	325	18,03	Non		
7	16	49	256	305	17,46	Non		
8	15	64	225	289	17	Oui	289	<b>83521</b>
9	14	81	196	277	16,64	Non		
10	13	100	169	269	16,4	Non		
11	12	121	144	265	16,28	Non		

La seule possibilité est donc **83521** fourmis pour l'escadron C.

## SUJET spécial seconde professionnelle

### 15) Le poinçonneur des lilas

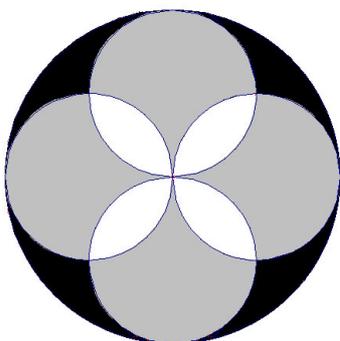
Pour placer le premier point, on dispose de 6 possibilités ; pour placer le second point, il reste 5 possibilités. On obtient ainsi  $6 \times 5$  paires de points qui sont dénombrées deux fois. On peut donc concevoir  $6 \times 5 / 2$  soit 15 caractères de deux points.



Puisque la grille est constituée de 6 nœuds, à chaque caractère de deux points, on peut associer un et un seul caractère de quatre points. Il y a donc autant de caractères de quatre points que de caractères de deux points, soit quinze.

## SUJET spécial seconde générale et technologique

### 16) Soirée « Disquo »



Soit R le rayon de la piste de danse

Soient  $N$ , l'aire de la surface noire et  $B$ , celle de la blanche.

Evaluons de deux manières l'aire de la surface délimitée par les quatre cercles de rayon  $R/2$ :

$$\pi R^2 - N \text{ ou } 4 \times \pi (R/2)^2 - B$$

En égalant, il vient  $N = B$ .