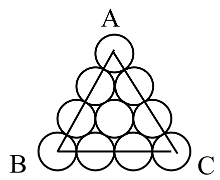
Rallye Mathématique d'Aquitaine 2006

Une Solution

SUJETS COMMUNS

1) Pile poil…

Le triangle ABC formé par les bigoudis est un triangle équilatéral dont le côté mesure 12 cm.



Sa hauteur est : $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 12=6\sqrt{3}\,cm$

La hauteur de la pile de bigoudis est : $6\sqrt{3}+4\ cm\approx 14{,}4\ cm$

2) Sortez couvert !

Après avoir éliminé les multiples de 6, de 9 et de 20, on teste les nombres restants en vérifiant s'ils sont somme de ces multiples. On s'aperçoit assez vite que seuls les nombres de préservatifs écrits en blanc sur fond noir dans le tableau ci-dessous ne peuvent être demandés au pharmacien.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	6	**7**	**8**	9	**10**
11	12	**13**	**14**	15	**16**	**17**	18	**19**	20
21	**22**	**23**	24	**25**	26	27	**28**	29	30
31	32	33	**34**	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

Cette liste s'arrête à 43 car comme toutes les quantités comprises entre 50 et 70 peuvent être demandées, par addition d'un multiple de 20, ces nouvelles quantités le seront aussi.

Pour une autre démonstration, demander aux responsables départementaux du Rallye.

3) Le spirographe

Soit k le nombre de tours cherché.
Le petit engrenage aura alors parcouru 56k dents du grand cercle. Comme il revient dans sa position initiale et qu'il comporte 18 dents, 56k doit donc être aussi un multiple de 18. Autrement dit 28k doit être un multiple de 9. Comme 28 n'est ni multiple de 3, ni de 9, c'est le nombre k qui doit l'être. Le plus petit multiple de 9 étant 9 lui même, il faut donc k=9. Au bout de 9 parcours du grand cercle, le crayon revient dans sa position initiale.

4) Pseudo-rectangle !

Par tâtonnement, pour les angles de ce triangle ABC pseudo-rectangle et isocèle, on obtient :
$\hat{B}=120°\ et\ \hat{A}=\hat{C}=30°$
On peut montrer qu'il n'y a pas d'autres possibilités pour les angles.
En effet :

$$\hat{B}\ est\ nécessairement\ obtus\ donc\ \hat{A}=\hat{C}.\ De\ plus\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°\ donc\ 2\hat{C}+\hat{B}=180°.$$
$$Comme\ \hat{B}-\hat{C}=90°,\ on\ a\ alors\ 3\hat{C}=90°,\ soit\ \hat{C}=30°.$$

Pour construire à la règle et compas les 2 angles de 30°, on peut tracer deux bissectrices dans un triangle équilatéral (qui possède bien entendu des angles de 60°).

5) Su Doku (*chiffres solitaires*)

L'équation proposé par le kangourou parmi les logos des partenaires est $3x - 9 = -3$ et sa solution est 2.
Voici la grille de Su Doku compléte :

8	**6**	**1**	**5**	**7**	**2**	**3**	**9**	**4**
5	**2**	**4**	**3**	**8**	**9**	**1**	**7**	**6**
3	**7**	**9**	**1**	**4**	**6**	**5**	**8**	**2**
4	**3**	**6**	**2**	**5**	**8**	**9**	**1**	**7**
7	**9**	**8**	**6**	**3**	**1**	**2**	**4**	**5**
1	**5**	**2**	**4**	**9**	**7**	**8**	**6**	**3**
2	**4**	**7**	**9**	**1**	**5**	**6**	**3**	**8**
9	**8**	**5**	**7**	**6**	**3**	**4**	**2**	**1**
6	**1**	**3**	**8**	**2**	**4**	**7**	**5**	**9**

6) De sacrés numéros !

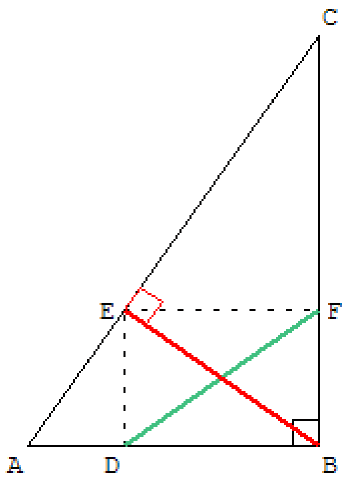
En remarquant que 24 + 40 = 64 et 33 + 47 = 2 × 40, il vient grâce aux deux premières conditions : ✪= 24, ★= 40 et ⌘ = 64.
La troisième condition impose ✿ = 47 et ❋= 33.
✪représente donc la Dordogne, ★représente les Landes, ⌘représente les Pyrénées-Atlantiques, ✿ représente le Lot et Garonne et ❋représente la Gironde.

7) Le roi des uns

La multiplication d'Attila est :
1 415 843 × 78477 = 111 111 111 111.
En tentant les divisions successives de 11 111 111, 111 111 111, 1 111 111 111, 11 111 111 111 et de 111 111 111 111 par 1 415 843, on trouve l'entier 78477.

8) Un fil d'or

BDEF est un rectangle donc les diagonales [BE] et [DF] ont même longueur. La position attendue du point E revient donc à minimiser la longueur BE, c'est-à-dire à placer E au pied de la hauteur du triangle ABC issue de B.



9) La castagne

Il peut vendre un maximum de **533 chataîgnes** au marché.
Pour cela, il fait un premier voyage avec 1000 chataîgnes sur son âne, mais s'arrête au bout de 200 dam. Il dépose 600 chataîgnes et revient à l'exploitation. Il fait un deuxième aller-retour en allant de nouveau à 200 dam, redépose 600 chataîgnes, puis fait un troisième et dernier aller avec les 1000 dernières chataîgnes. Il se retrouve donc à 200 dam de son exploitation avec 600+600+800=2000 chataîgnes.
Il fait un nouveau départ avec 1000 chataîgnes, fait 333 dam, dépose 334 chataîgnes et revient au tas de chataîgnes. Il prend ensuite les 1000 dernières chataîgnes, fait une pause là où il a laissé les 334 chataîgnes. Il a alors 667+334=1001 chataîgnes. Et il lui reste 1000-200-333 = 467 km à parcourir.
Il prend donc 1000 chataîgnes, et va directement au marché. En y arrivant, il pourra vendre 1000-467 =533 chataîgnes.

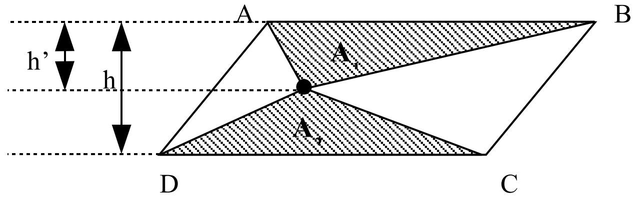
Un explication:
Si un voyage ne se fait pas à plein (départ avec 1000 chataîgnes) alors ce n'est pas une situation optimum. On voit donc qu'en ayant 3000 chataîgnes, il faudra faire 3 départs, donc 5 trajets (deux aller-retours + 1 aller). On optimise en se retrouvant à la première étape avec un nombre entier de milliers de chataîgnes. À cet endroit, lorsqu'il n'y a plus de chataîgnes à l'exploitation, on se retrouve avec 3000-5d (d étant la distance de la première étape). 3000-5d est un multiple de 1000 si d=400 ou d=200. On conserve plus de chataîgnes avec d=200. Ensuite, comme il nous reste 2000 chataîgnes, on va faire 3 trajets, et se retrouver à une distance d' de d avec 2000-3d', optimisé pour d'=333,33… On se retrouve à d+d' avec 1000 chataîgnes.

10) Déchiffre

96 420 × 87 531 = **8 439 739 020**
Le produit le plus grand s'obtient avec les nombres 96 420 et 87 531.

11) Partage du rhomboïde

$A_1 + A_2 = (AB \times h')/2 + DC \times (h - h')/2$
$= AB \times h/2$
L'aire de la zone hachurée représente donc la moitié de celle du parallèlogramme.
Le partage est donc équitable.



12) Sur les roses

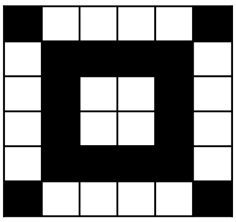
Soit n le nombre de rosiers que met Julien sur le côté de son carré à la première tentative.
On a alors : $n^2 + 52 = (n + 4)^2 - 60$, soit $n^2 + 52 = n^2 + 8n + 16 - 60$, d'où $8n = 52 - 16 + 60$, soit $8n = 96$ et $n = 96/8 = 12$.
Or $12^2 + 52 = 196$ donc Julien possède 196 rosiers.
On remarque que $196 = 14^2$; par conséquent, Julien peut disposer ses rosiers « en carré » (de 14 « de côté »).

13) Un bon millésime !

Par tâtonnement, on obtient la décomposition en produit de facteurs premiers de 2 006 :
2 006 = 2 × 17 × 59
Les diviseurs de 2006 sont donc: 1 ; 2006 ; 2 ; 1003 ; 17 ; 118 ; 34 et 59
Amandine a forcément 17 ans, son père 59 ans et elle a obtenu 2 sur 20 en maths.

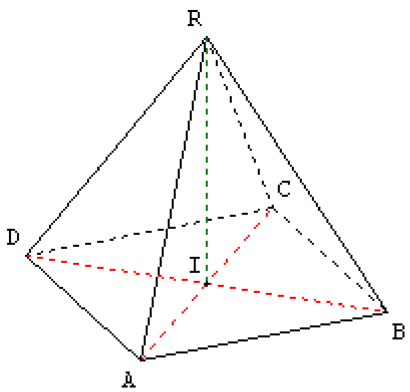
14) Mollo Mollo dans la case

Les cases à noircir sont :



SUJET SPECIAL SECONDE GENERALE ET TECHNOLOGIQUE

15) Pyraboule



Pour la pile 1 : les centres des 5 balles forment la pyramide à base carrée ci-contre

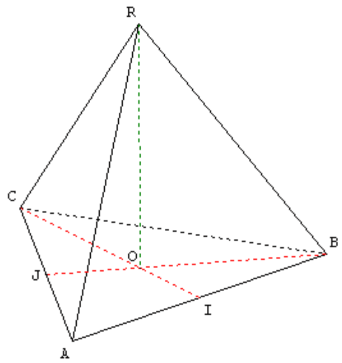
Les distances AB, BC, CD, AD, AR, BR, CR et DR sont toutes égales à 3,8 cm (deux rayons)
La hauteur de la pile est donc égale à RI + 3,8
Reste à calculer RI.

[AC] est la diagonale du carré ABCD de côté 3,8cm donc il mesure
$3{,}8 \times \sqrt{2}\, cm$
En appliquant le théorème de Pythagore dans RIA rectangle en I on obtient :

$$RI = \frac{3{,}8}{\sqrt{2}} \approx 2{,}69\, cm \quad .$$

La première pile mesure donc : $RI + 3{,}8 = 3{,}8\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) cm \approx 6{,}49\, cm$

Pour la pile 2 : les centres des balles forment la pyramide à base triangulaire ci-contre



A nouveau, les distances AB, BC, CA, AR, BR et CR sont toutes égales à 3,8 cm (deux rayons)

La hauteur de la pile est égale à RO + 3,8
Reste à calculer RO

Le triangle ABC est équilatéral de côté 3,8cm. Sa hauteur [BJ] est égale à

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3{,}8\ cm$$

O étant le centre de gravité du triangle ABC (et aussi orthocentre, centre du cercle circonscrit et centre du cercle inscrit à ABC), on a :

$$OB=\frac{2}{3}BJ=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 3{,}8\ cm\approx 2{,}19\ cm$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ROB rectangle en O, on obtient :

$$RO=\frac{\sqrt{6}}{3}\times 3{,}8\ cm\approx 3{,}1\ cm$$

La deuxième pile mesure donc:

$$RO+3{,}8=3{,}8\times(1+\frac{\sqrt{6}}{3})cm\approx 6{,}9\ cm$$

La pile la plus haute est donc la deuxième et l'écart entre les deux mesure :

$$3{,}8(\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2})\approx 0{,}42\ cm$$