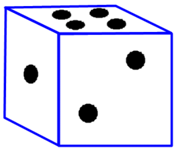
Logique

<u>Énigme 1</u> La face cachée (5 pts)

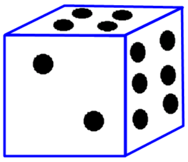
La somme de deux faces opposées d'un dé est toujours égale à 7.

On peut s'amuser à chercher les faces observées par nos quatre amis.



7 = 4 + 2 + 1

Une seule solution

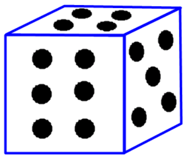


12 = 6 + 4 + 2

5 + 4 + 3 et 6 + 5+ 1

sont impossibles car

4 + 3 et 6 + 1 font 7

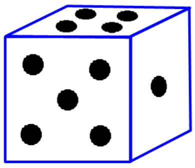


15 = 6 + 4 + 5

La plus grande somme

possible

Une seule solution



10 = 5 + 4 +1

6 + 3 +1 et 5 + 3 + 2

sont impossibles car

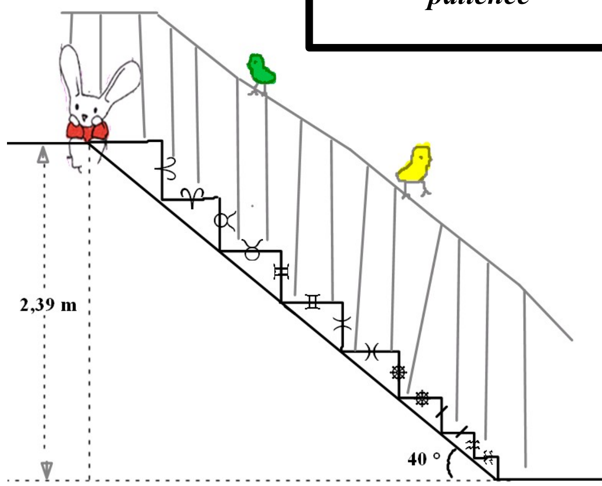
6 + 1 et 5 + 2 font 7

En observant seulement deux dés, ceux dont les sommes sont 7 et 15 ; on voit cinq faces sur les six.

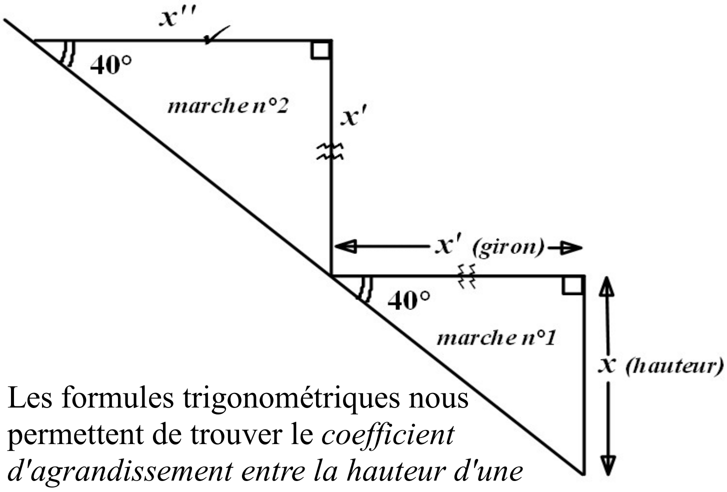
Sur la face cachée, il y a 3 points noirs

<u>Enigme 2</u> Il est fou ce maçon (8 pts)

Trigonométrie, résolution d'équation, puissance, une bonne calculatrice et de la patience



Les marches sont des triangles rectangles dont on connait un angle aigu.



Les formules trigonométriques nous permettent de trouver le *coefficient d'agrandissement entre la hauteur d'une marche et son giron.*

$$\tan 40 = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \qquad x' = \frac{x}{\tan 40} \qquad x'' = \frac{x'}{\tan 40} = \frac{x}{(\tan 40)^2}$$

Le coefficient d'agrandissement est égale à $\frac{1}{\tan 40}$

$$\underbrace{x}_{\text{hauteur } 1^{\text{ère}} \text{ marche}} + \underbrace{x \times \frac{1}{\tan 40}}_{\text{hauteur } 2^{e} \text{ marche}} + \underbrace{x \times \left(\frac{1}{\tan 40}\right)^2}_{\text{hauteur } 3^{e} \text{ marche}} + \underbrace{x \times \left(\frac{1}{\tan 40}\right)^3}_{\text{hauteur } 4^{e} \text{ marche}} + \ldots + \underbrace{x \times \left(\frac{1}{\tan 40}\right)^6}_{\text{hauteur } 7^{e} \text{ marche}} + \underbrace{x \times \left(\frac{1}{\tan 40}\right)^7}_{\text{hauteur } 8^{e} \text{ marche}} = 2{,}39$$

En factorisant, on obtient :

$$x \times \left[1 + \frac{1}{\tan 40} + \left(\frac{1}{\tan 40}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tan 40}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{\tan 40}\right)^6 + \left(\frac{1}{\tan 40}\right)^7\right] = 2{,}39$$

Une bonne calculatrice, de la patience

On résout l'équation et on obtient : $x \approx 15\,cm$

La hauteur de la première marche est environ 15 cm

<u>Enigme 3</u> Né un jour bleu (7 pts)

arithmétique

Monsieur Tammet et l'organisateur du rallye sont nés au XXème siècle.
L'année cherchée commence donc par 19 (qui est un nombre premier.)

Le ***chiffre des dizaines*** ne peut-être que 7 puisque le nombre formé par les deux chiffres du milieu est premier ; seul 97 l'est.

Pour le ***chiffre des unités***, il y a trois possibilités : 1 ; 3 ou 9 puisque le nombre formé par les deux derniers chiffres doit être premier.

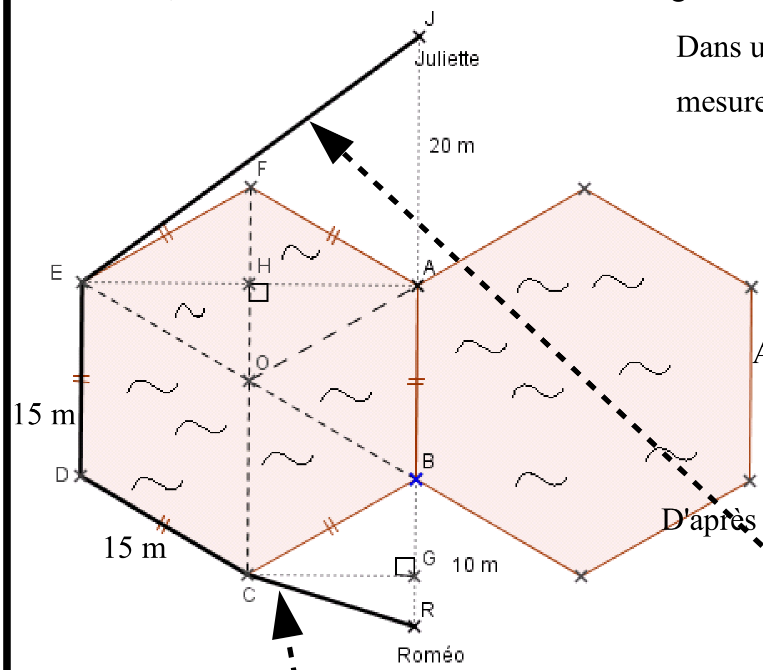
On élimine 1971 car il est divisible par 9.
Il reste 1973 et 1979. Monsieur Tammet étant plus jeune que l'organisateur du rallye ; **il est né en 1979**.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Daniel_Tammet

<u>Enigme 4</u> Roméo et Juliette (9 pts)

Déterminer le plus court chemin, Polygones réguliers, Pythagore, Racines carrées

La distance la plus courte entre deux points étant « la ligne droite » , Juliette doit suivre le chemin tracé en gras.



Dans un hexagone régulier, les angles au centre mesurent 60° et les triangles sont équilatéraux.

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté ***c*** est égale à : $h = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$

AOF est un triangle équilatéral de côté 15 m.

donc $AH = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$ et $AE = 15\sqrt{3}$

D'après Pythagore dans le triangle AEJ, rectangle en A :

$$JE^2 = AJ^2 + AE^2$$

$$JE^2 = 20^2 + (15\sqrt{3})^2$$

$$JE^2 = 400 + 675$$

$$\boxed{JE = 5\sqrt{43}\ m}$$

Dans le triangle CRG, rectangle en G, on peut facilement trouver les longueurs des deux côtés de l'angle droit.

$GR = 10 - \dfrac{15}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $CG = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$

Encore Pythagore ! !

$$CR^2 = CG^2 + GR^2 = \left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{675}{4} + \frac{25}{4} = \frac{700}{4}$$

D'où $\boxed{CR = 5\sqrt{7}}$

Conclusion

Juliette doit parcourir en m : $5\sqrt{43} + 5\sqrt{7} + 30$

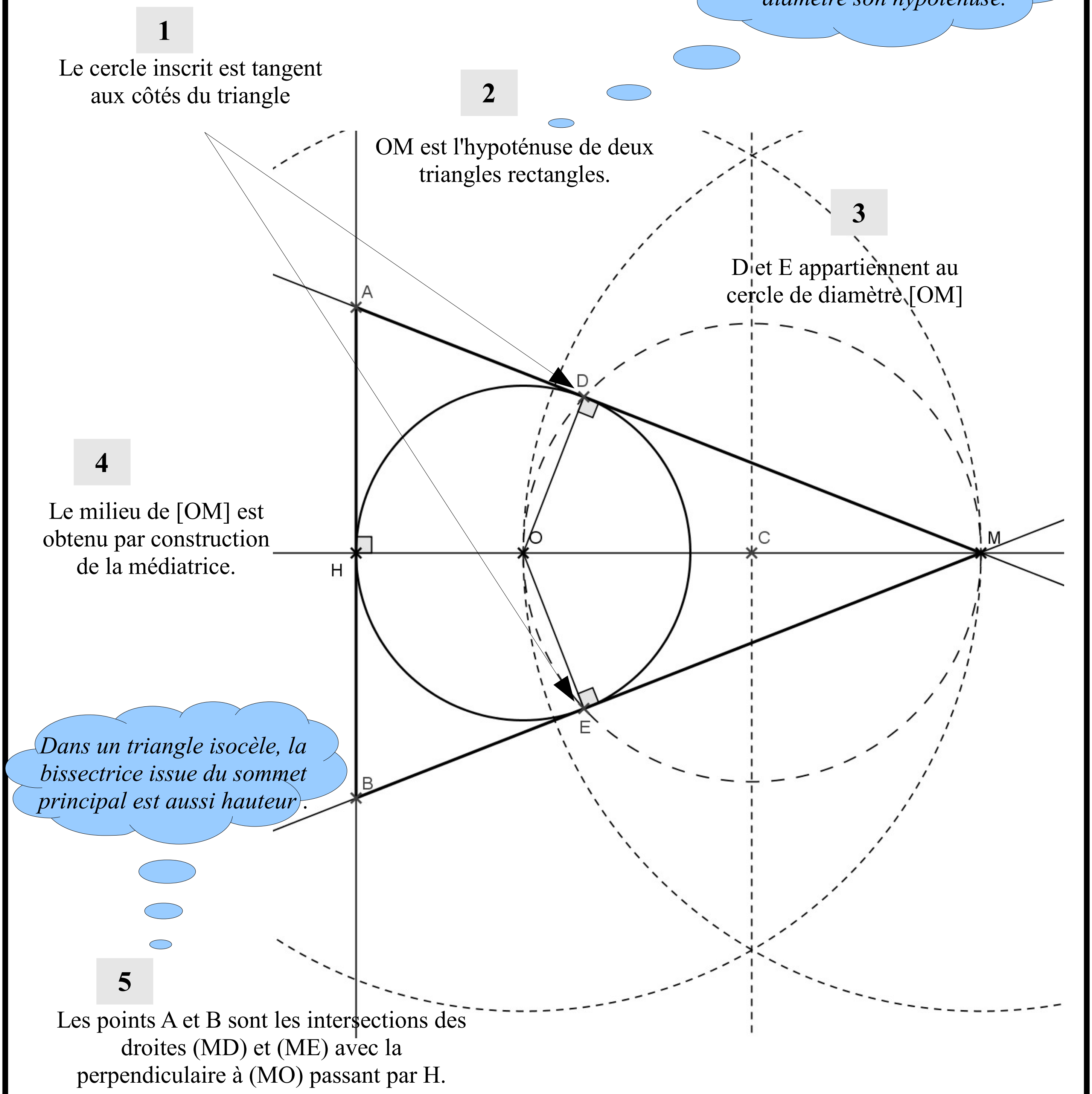
environ 76 m ! ! ! !

Enigme 5 **A l'aise Blaise (3 pts)** *cryptanalyse*

LA VIE N'EST BONNE QU'A ETUDIER ET A ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES.

Enigme 6 **Inscription obligatoire (7 pts)** ***Cercle inscrit, triangle rectangle, construction au compas***

Indication : Pour réussir un problème de construction, on peut raisonner à partir d'une figure vérifiant les mêmes propriétés. (*cette technique consiste à prendre le problème à l'envers*)



Logique, calcul algébrique

Énigme 7 Enigme fractale (6 pts)

En essayant plusieurs combinaisons, on se rend compte que les élèves de la classe ont joué **leur joker sur une énigme à 8 points**, qu'il ont échoué sur une énigme à 5 points et sur la deuxième énigme à 8 points.

En effet, $3+5+7+2\times8+9+9-5-8 = 36$

Cette combinaison est la seule possible.

Voici un dossier réponse possible :

Énigmes	Choix	Joker	Points	
Enigme 1	×		5	5
Enigme 2	×	×	8	16
Enigme 3			7	
Enigme 4	×		9	9
Enigme 5	×		3	3
Enigme 6	×		7	7
Enigme 7			6	
Enigme 8	×		5	-5
Enigme 9			5	
Enigme 10	×		9	9
Enigme 11			7	
Enigme 12	×		8	-8
				36

Cette énigme contient toutes les énigmes de cette épreuve : ***« le Rallye dans le Rallye »***, on retrouve l'idée de ***Fractales*** :

cite-sciences fractale

http://www.futura-sciences.com/fr/doc/t/mathematiques/

photos fractales

http://www.fractalexpo.com/index.htm

Arithmétique

Enigme 8 Un cheval matheux (5 pts)

Le code mystérieux à 4 chiffres commence par un 6, il est donc compris entre 6 000 et 6 999.
Il ne possède que 3 diviseurs dont 1 et lui-même.
Or les diviseurs d'un nombre entier « marchent par paire ». (S*i on trouve un diviseur, on peut en déduire un autre.*)
Donc le code mystérieux est le carré d'un nombre premier.

$73^2 = 5\,329$

$79^2 = 6\,241$

$83^2 = 6\,889$

$89^2 = 7\,921$

Le code a 4 chiffres différents,
le code secret est donc 6 241.

arithmétique

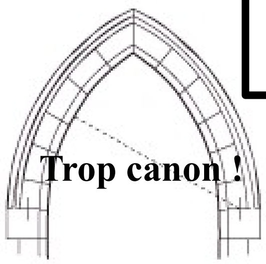
Énigme 9
Une retraite au poil (5 pts)

La recherche des diviseurs de 2011 montre que 2011 est premier.

Ses seuls diviseurs sont 1 et 2011.
1 est le carré de 1.

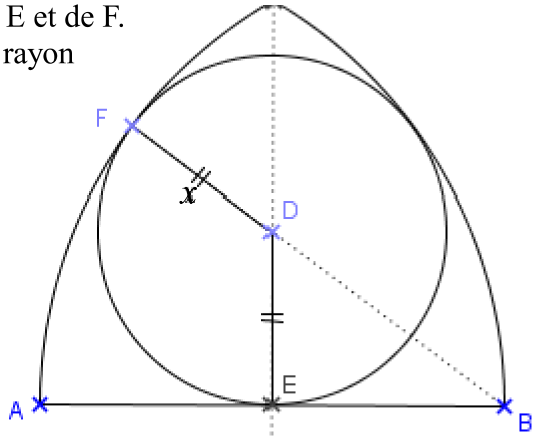
Robert partira a la retraite dans un an et sa moustache comporte 2011 poils.

Médiatrice, Pythagore, Equation



Enigme 10 **Trop canon !** **(9 pts)**

D est un point de la médiatrice de [AB] et est équidistant de E et de F.
Appelons x le rayon du canon.



Les distances AB et BF valent toutes les deux 3 empans

BD = $3 - x$ *(empans)* et BE = $\frac{3}{2} = 1,5$ *(empans)*

Dans le triangle BED, rectangle en E, le théorème de Pythagore permet de déduire la valeur de x :

x est solution de l'équation $(3-x)^2 = x^2 + 1,5^2$

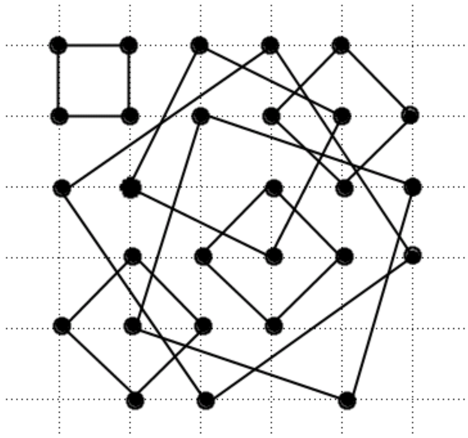
On obtient x = 1,125 empan.

Le diamètre du canon de Toine vaut 2,25 empans.

Logique

Enigme 11 **Points carrés** **(7 pts)**

http://fr.wikipedia.org/wiki/Henri_Poinca

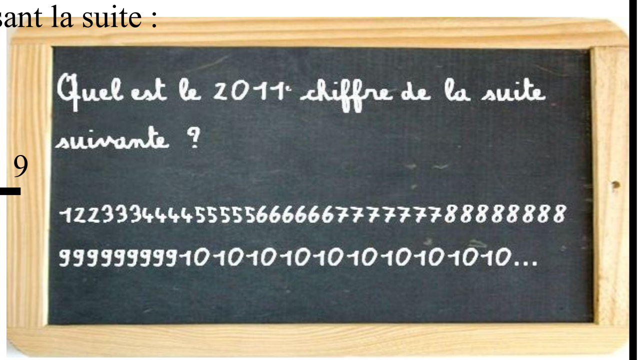


Enigme 12 Lire la suite (8 pts)

Dénombrement

Patience, patience ! ! !

Nous allons compter le nombre de chiffres en décomposant la suite :



1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 .... 9 9 9 9 9 9 9 9 9

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9

Suite	Nombre de chiffres
1 2 2 3 3 3 ....9 9 9 9 9 9 9 9 9	$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$
10 10 10 .... 19 19 19 19	$2\times(10+11+12+13+14+15+16+17+18+19)=290$
20 20 20 20 .... 29 29 29 29 29	$2\times(20+21+22+23+24+25+26+27+28+29)=490$
30 30 ....39 39 39 39	$2\times(30+31+32+33+34+35+36+37+38+39)=690$
	Total : $45+290+490+690=1515$

Il y a 1 515 chiffres dans la suite 1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 .... 39 39 39 39 39

1 515 . . . ? ? ?

ça ne vous rappelle rien?

Poursuivons pas à pas notre comptage :

Suite	Nombre de chiffres
1 2 2 3 3 3 ....40 40 40 40	$1515+80=1\ 595$
1 2 2 3 3 3 ....41 41 41 41	$1595+82=1\ 677$
1 2 2 3 3 3 ....42 42 42 42	$1677+84=1\ 761$
1 2 2 3 3 3 ....43 43 43 43	$1761+86=1\ 847$
1 2 2 3 3 3 ....44 44 44 44	$1847+88=1\ 935$
1 2 2 3 3 3 ....45 45 45 45	$1935+90=2\ 025$

le 2011^{e} chiffre se trouve dans la série des “45”.

C'est donc soit un 4 soit un 5.

Le rang du 4 est un chiffre pair et le rang du 5 est un chiffre impair.

Donc le 2011^{e} chiffre de la suite 1223334444….. est 5.