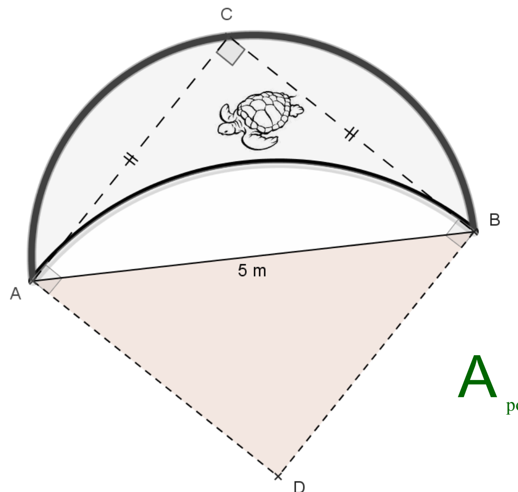
## Énigme 1 *(6 points)* Bassin lune

**Aire et géométrie**




*On note* D le centre de l'arc de cercle tangent en A et B aux côtés [AC] et [BC] .

On prouve que ACBD est un carré.

*(définition de tangente et propriété sur les quadrilatères)*

$$\mathcal{A}_{\text{bassin}} = \mathcal{A}_{\text{1/2 disque de diamètre AB}} - \mathcal{A}_{\text{portion de disque blanc}}$$

$$\mathcal{A}_{\text{portion de disque blanc}} = \mathcal{A}_{\text{1/4 disque de rayon AD}} - \mathcal{A}_{\text{ADB}}$$

Le carré ACBD a pour côté $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ donc $\mathcal{A}_{\text{portion de disque blanc}} = \dfrac{25}{8}\pi - \dfrac{25}{4}\ m^2$

$$\mathcal{A}_{\text{bassin}} = \frac{25}{8}\pi - \left(\frac{25}{8}\pi - \frac{25}{4}\right) m^2$$

***Solution :*** $\mathcal{A}_{\text{bassin}} = \dfrac{25}{4}\ m^2 = 6{,}25\, m^2$

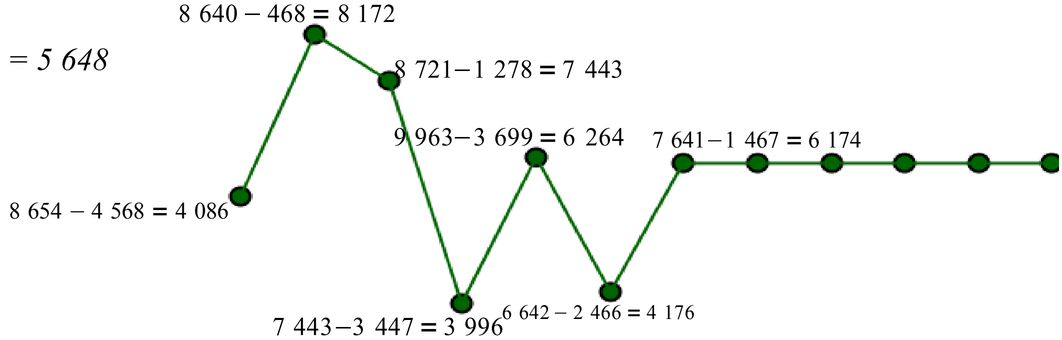
Pour aller plus loin

Théorème des deux lunules

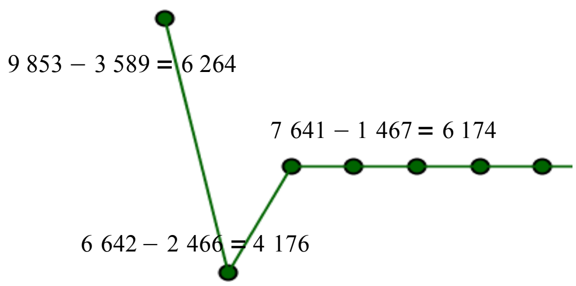
## Énigme 2 *(4 points)* Kap ou pas Kâpres ?

**Algorithmique**

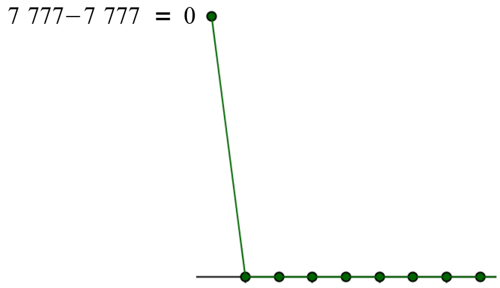
*Exemple 1 :* $n = 5\ 648$




*Exemple 2 :* $n = 8\ 953$



*Exemple 3 :* $n = 7\ 777$




Voici un Programme pour Casio Graph 35+ qui permet de visualiser les différentes possibilités à la sortie de cet algorithme appelé « algorithme de Kaprekar »:

```
=====KAPREKAR========
"NOMBRE A 4 CHIFFRES"?→X↵
4→Dim List 1↵
Do↵
X→N↵
Int (X÷1000)→A↵
Int ((X−1000A)÷100)→B↵
Int ((X−1000A−100B)÷10)→C↵
Int (X−1000A−100B−10C)→D↵
A→List 1[1]↵
B→List 1[2]↵
C→List 1[3]↵
D→List 1[4]↵
SortA(List 1)↵
List 1[1]→A↵
List 1[2]→B↵
List 1[3]→C↵
List 1[4]→D↵
A×1000+B×100+C×10+D→I↵
I◢
D×1000+C×100+B×10+A→J↵
J◢
J−I→X↵
"Difference=":X◢
LpWhile X≠N↵
"FIN"↵
```

***Solution :*** Avec un nombre à 4 chiffres, l'algorithme stagne au bout de 8 boucles maximum à 6 174 ou à 0 dans le cas des quatre chiffres identiques .

Pour aller plus loin
Pour aller plus loin

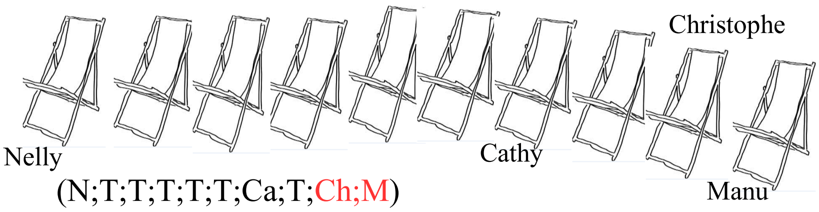
*L'algorithme de « Kaprekar »*
*de* ***Patrick CLEMENT***
*(avec Geogebra)*

Tester l'algorithme

## Énigme 3 *(3 points)* Transats Lantik

**Dénombrement**

On peut modéliser la situation avec une chaine de caractères, puis lister **toutes** les positions possibles.




(N;T;T;T;T;T;Ca;T;Ch;M)

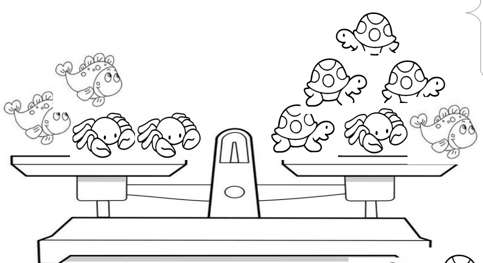
- (Ca)
  - (Ca;T;Ch)
    - (Ca;T;Ch;T;T;T;N)
      - (Ca;T;Ch;T;T;T;N;T;T;T;T;T;T;T;T;M)
      - (M;T;T;Ca;T;Ch;T;T;T;N)
    - (N;T;T;T;T;T;Ca;T;Ch)
      - (N;T;T;T;T;T;Ca;T;Ch;M)
      - (M;T;T;T;T;T;T;T;T;N;T;T;T;T;T;Ca;T;Ch )
  - (Ch;T;Ca)
    - (Ch;T;Ca;T;T;T;T;T;N)
      - (Ch;T;Ca;T;T;T;T;T;N;T;T;T;T;T;T;T;T;M)
      - (M;Ch;T;Ca;T;T;T;T;T;N)
    - ( N;T;T;T;Ch;T;Ca)
      - (N;T;T;T;Ch;T;Ca;T;T;M)
      - (M;T;T;T;T;T;T;T;T;N;T;T;T;Ch;T;Ca)

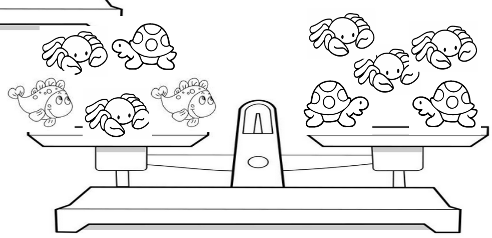
***Solution :*** Manu et Christophe sont séparés d'au maximum 16 transats et d'au minimum 0 transat (ils sont côte à côte).

## Énigme 4 *(3 points)* Masse de Moules

**Algèbre**

*Notons* $T$ : *la masse du moule en forme de tortue*
$P$ : *la masse du moule en forme de poisson*
$C$ : *la masse du moule en forme de crabe*





$$\begin{cases} 2P + 2C = 4T + C + P \\ 2P + 2C + T = 2T + 3C \end{cases}$$

*En ôtant de chaque côté les objets identiques, la « mise en équations » est simplifiée.*

$$\begin{cases} P + C = 4T \\ 2P = T + C \end{cases}$$

*Par combinaison de ligne, on obtient :*

$$\begin{cases} 3P = 5T \\ 7T = 3C \end{cases} \quad \text{d'où :} \quad \begin{cases} P = \frac{5}{3}T \\ C = \frac{7}{3}T \end{cases}$$

*Or* $T < \frac{5}{3}T < \frac{7}{3}T$

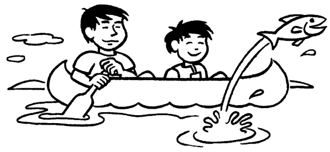
*donc*

***Solution :*** $T < P < C$

## Énigme 5 *(4 points)* Non mais, à l'eau quoi !

**Dénombrement**

- Il faut effectuer 4 traversées pour qu'un professeur change de rive et que le canoë revienne sur la rive de départ.
- 2 traversées suffisent pour faire passer un élève et ramener le canoë. Si un même élève fait la navette, il doit faire traverser ses 34 camarades.
- Au dernier passage, le canoë ne revient pas.



$4 \times 4 + 34 \times 2 - 1 = 83$

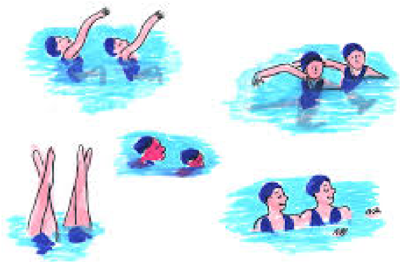
***Solution :*** Notre canoë aura traversé 83 fois l'Isle.

## Énigme 6 *(3 points)* Garçon, l'audition !

**Diviseurs**

Le nombre de nageurs se présentant à l'audition est :

- Un nombre entier inférieur à 15
- Un nombre entier divisible par 3 et par 4 donc par 12



*Lors de cette audition, 12 nageurs et 5 non nageurs se sont présentés.*

***Solution :*** 17 personnes ont participé à l'audition.

## Énigme 7 *(5 points)* A sec sur l'eau ?

**Division euclidienne**


La cuve contient au total 18 502 litres.

$$V_{cuve} = 2{,}9 \times 2{,}9 \times 2{,}2 = 18{,}502\, m^3 = 18\ 502\ L$$

Un bateau consomme 22 litres par jour. Entre le 1er juillet au 31 août, on compte 62 jours. La consommation estivale d'un bateau (excepté le Seunechaîne) est de $22 \times 62 = 1\ 364\ litres$.

$$\begin{array}{r|l} 18502 & 1\ 364 \\ \hline 4862 & 13 \\ 770 & \end{array}$$

*Consommation du Seunechaîne.*

*Nombre de bateaux naviguant tous les jours.*

Le Seunechaîne consomme, lui aussi, 22 litres par jour.

$770 \div 22 = 35$

***Solution :*** Le « Seunechaîne » a profité des 35 magnifiques journées de l'été 2014 !

## Énigme 8 *(5 points)* Sparrow …

**Jeu**

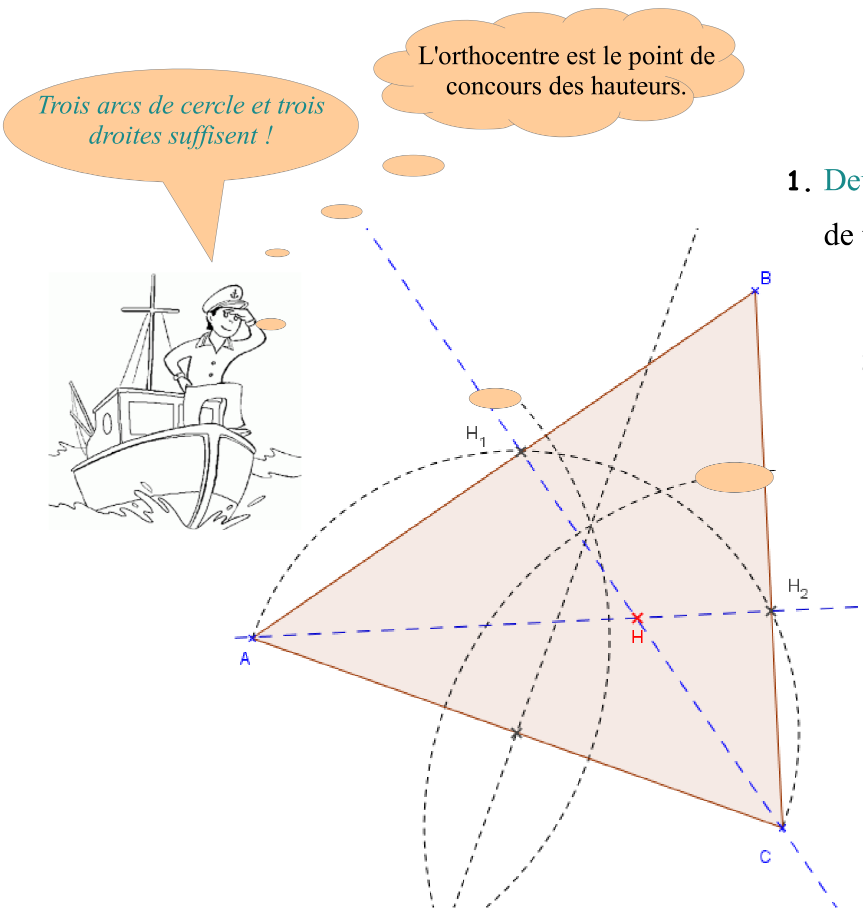

Avec de la patience et un peu de chance, les 5 points sont assurés.

*Bon plan pour le Jocker !*

## Énigme 9 *(7 points)* Le compas dans l'oeil

***Construction à la règle et au compas***

**1ere solution à 3 écus:**




1. Deux arcs de cercle et une droite permettent de tracer la médiatrice du segment [AC].

2. Le demi-cercle de diamètre [AC] permet d'obtenir les points $H_1$ et $H_2$ : pieds de deux hauteurs du triangle.

*$ACH_1$ et $ACH_2$ sont des triangles inscrits dans le cercle de diamètre [AC]*

3. L'orthocentre est l'intersection des deux droites $(CH_1)$ et $(AH_2)$ .

## 2ème solution à 1 écu:

*1 cercle et 12 droites suffisent !*

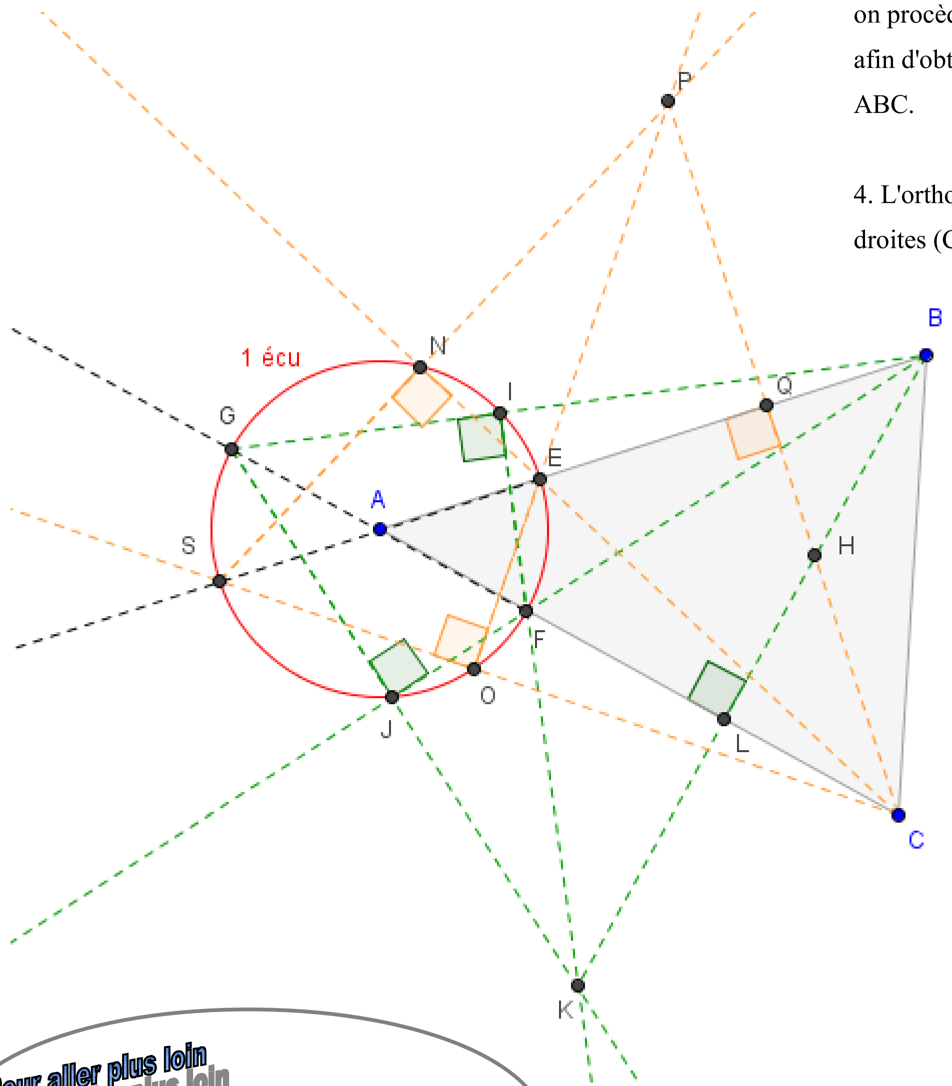
Pour trouver l'orthocentre de ABC, on va construire 2 hauteurs:

1. On trace un cercle rouge de sommet A (par exemple) qui coupe deux côtés du triangle en E et F. On prolonge ces 2 côtés pour former 2 diamètres [GF] et [SE].

2. Grâce au diamètre [GF], on construit le triangle vert GBK:
- on trace (BG) et (BF)
- on nomme I et J leur point d'intersection avec le cercle
- on trace (IF) et (GJ)
- on nomme K leur point d'intersection
- (GF) étant la 3e hauteur du triangle vert GBK, elle coupe (BK) perpendiculairement: (BK) est donc une hauteur du triangle ABC.

3. Grâce au diamètre [SE], on construit le triangle orange SPC:
on procède de même que pour le triangle vert afin d'obtenir une 2e hauteur (CP) du triangle ABC.

4. L'orthocentre H est l'intersection des deux droites (CP) et (BK).




**Pour aller plus loin**

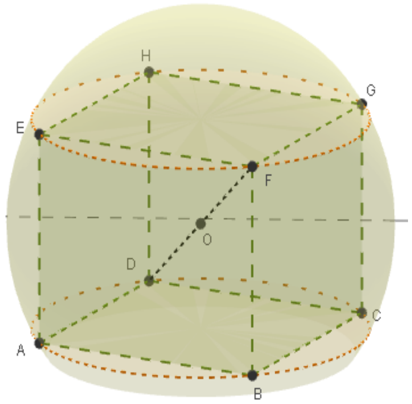
Certaines constructions restent irréalisables à la règle et au compas seulement: c'est le cas de la construction d'un heptagone régulier par exemple.

***Solution :*** Notre moussaillon n'a dépensé que 1 écu (les réponses 1,2 et 3 écus ont été acceptées).

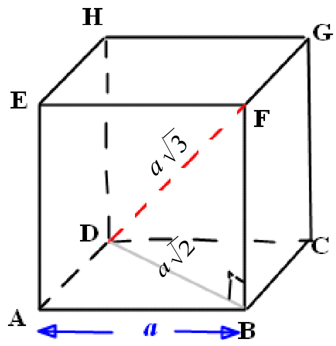
## Énigme 10 *(7 points)* La boule à neige

**Volume et solides**

Le cube le plus grand est inscrit dans la boule. Sa diagonale est un diamètre de la boule.




Or la diagonale d'un cube de côté $a$ est égale à $a\sqrt{3}$ .




*On retrouve ce résultat en utilisant deux fois le théorème de Pythagore : dans les triangles ABD puis DBF rectangles respectivement en A et B.*

Le cube de Blanche a pour côté $a = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$ et pour volume : $V = \dfrac{1\,000}{3\sqrt{3}}\ cm^3 \approx 192{,}5\ mL$

***Solution :*** $V_{cube} = \dfrac{1\,000}{3\sqrt{3}}\ cm^3 \approx 192{,}5\ mL$

## Énigme 11 *(6 points)* Vous avez dit divzar ?

**Arithmétique**

Un nombre que nous avons nommé « nombre divzar » est en réalité appelé « nombre étrange ». Pour trouver le plus petit (non nul), la méthode est empirique. Elle consiste à effectuer le test sur tous les entiers, les uns après les autres jusqu'à trouver celui qui répond à la définition.

> « Les diviseurs propres de 70 sont 1, 2, 5, 7, 10, 14 et 35. Leur somme vaut 74 mais aucune somme de certains de ses diviseurs ne donne 70. Il existe une infinité de nombres étranges. Les huit plus petits sont 70, 836, 4 030, 5 830, 7 192, 7 912, 9 272, 10 430. En 2012, aucun nombre étrange impair n'a encore été découvert. » Wikipédia

Pour aller plus loin

Nombre étrange

Récréomath

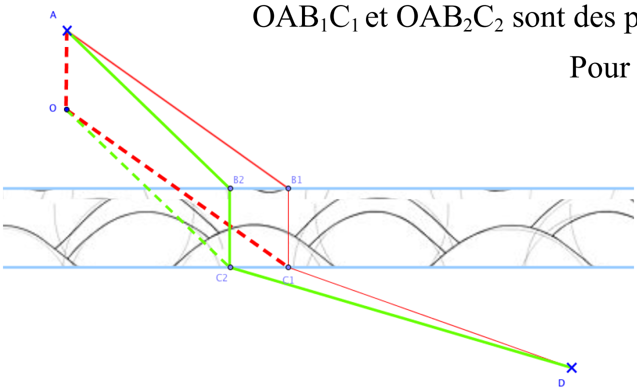
***Solution :***

**Le plus petit nombre divzar est 70 (ou 0).**

## Énigme 12 *(6 points)* N'est-ce pas fait ?

***Pythagore, racines carrées, symétrie***

Sur cette figure, deux chemins possibles ont été tracés.




$OAB_1C_1$ et $OAB_2C_2$ sont des parallélogrammes.

Pour le tracé rouge, la distance parcourue est :

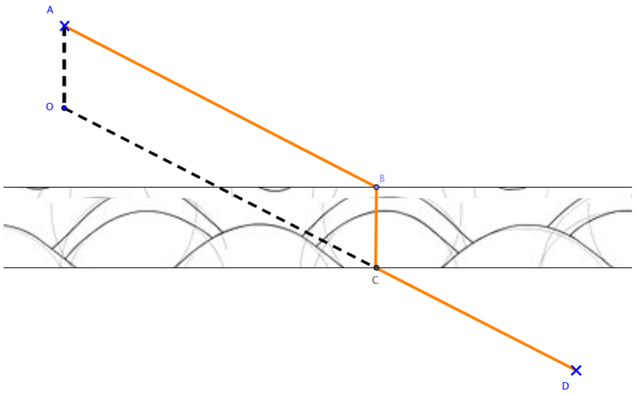
$$AB_1+B_1C_1+C_1D = AO+OC_1+C_1D$$

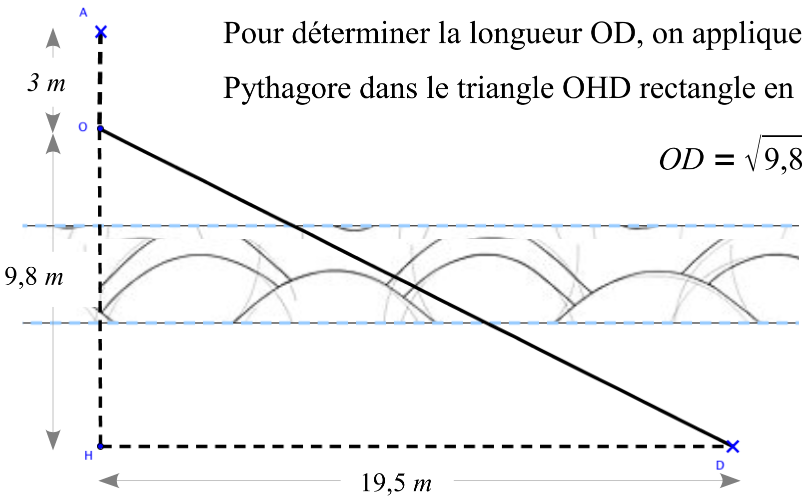
Pour le tracé vert, la distance parcourue est :

$$AB_2+B_2C_2+C_2D = AO+OC_2+C_2D$$

Donc pour optimiser la longueur du chemin, il faut optimiser la distance $OC_1+C_1D$.

La distance $OC_1 + C_1D$ est optimale lorsque les points O, $C_1$ et D sont alignés.




Pour déterminer la longueur OD, on applique le théorème de Pythagore dans le triangle OHD rectangle en H .

$$OD = \sqrt{9{,}8^2 + 19{,}5^2} = \sqrt{476{,}29}$$

***Solution :*** Le Chemin le plus court entre le Jardin de Jean et la cabane d'Alexandra est exactement égal à $3+\sqrt{476{,}29}$ mètres.