RALLYE MATHEMATIQUE D'AQUITAINE

LUNDI 13 MARS 2017

	Titre	difficulté	Notions abordées	Compétences sollicitées	
1	Course d'orientation	5 pts	Vitesse, Optimisation, démarche d'investigation et trigonométrie	Raisonner, calculer	Chercher, communiquer sont des compétences sollicitées par toutes les énigmes.
2	Tache Complexe	7 pts	Polygones réguliers, angles, rotation, programmation	Raisonner, représenter	
3	Jeu de sot	4 pts	Diviseurs et Inégalité triangulaire	Raisonner, représenter	
4	En retraite	4 pts	Fraction et équation	Modéliser, Calculer	
5	Rouleaux de printemps	6 pts	Cercles tangents, Pythagore	Représenter, raisonner	
6	Cryptarithme	4 pts	Stratégie	Calculer	
7	Solde sur le volume !	5 pts	Solides et Volumes	Modéliser, Calculer	
8	mathador	7 pts	Calcul algébrique	Calculer	
9	Une déco qui ne manque pas d'aire	6 pts	Triangles, Quadrilatères et calcul d'aires	Calculer, représenter	
10	Fête du Slip	6 pts	Probabilité	Modéliser	
11	Big Bezout	4 pts	Arithmétique	Modéliser, Calculer	
12	Touché ?	3 pts	Jeux et stratégie	Chercher	

Énigme 1 *(5 points)* **Course d'orientation**

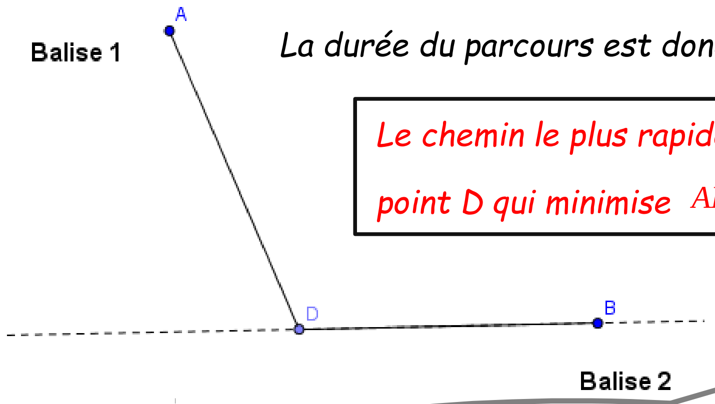
Vitesse, optimisation

Démarche d'investigation

Dans la forêt, Sébastien court à 9 km/h, et sur la route à 18 km/h.

Dans la forêt il court la distance AD et la durée de son parcours (en h) est $t_1 = \frac{AD}{9}$

Sur la route, il parcourt la distance DB en une durée $t_2 = \frac{DB}{18}$



La durée du parcours est donc égale à : $t = t_1 + t_2 = \frac{1}{9}\left(AD + \frac{1}{2}DB\right)$

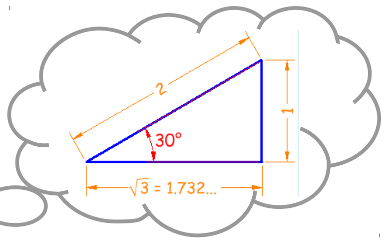
Le chemin le plus rapide correspond au point D qui minimise $AD + \frac{1}{2}DB$

Bon exercice d'optimisation avec Géogebra !

En effectuant plusieurs tracés, on peut trouver par dichotomie **la position du point D au millimètre près.**

Trigonométrie

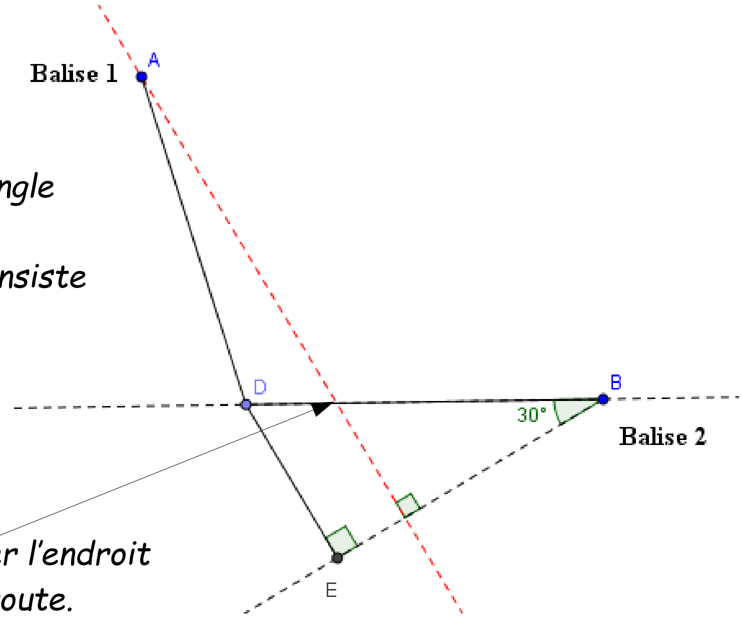
Démonstration : 1..2..$\sqrt{3}$.. Partez !



Dans un triangle rectangle $\sin \hat{a} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

On sait que $\sin(30°) = \frac{1}{2}$

Lorsqu'un triangle rectangle possède un angle aigu de 30°, on a : $\text{côté opposé} = \frac{1}{2}\,\text{hypoténuse}$



En construisant le triangle DBE, rectangle en E tel que $\widehat{DBE} = 30°$
On se rend compte que le problème consiste à minimiser AD + DE.

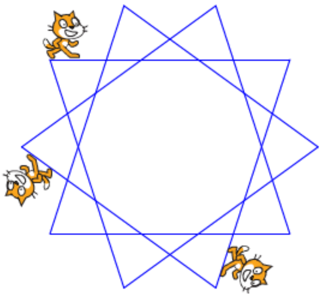
Ce minimum est atteint lorsque les points A, D et E sont alignés.

On peut donc, par construction trouver l'endroit exact où Sébastien doit rejoindre la route.

Énigme 2 *(7 points)*

Rotation et Programmation

Tache complexe

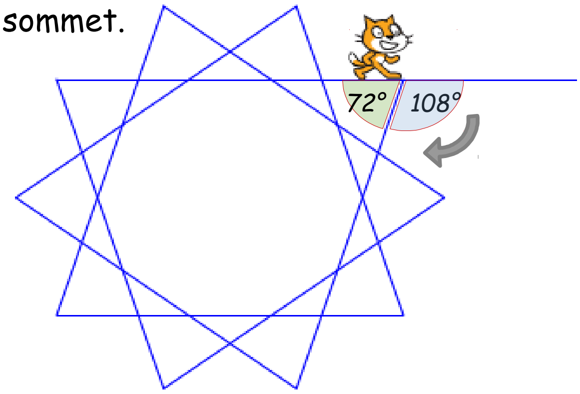


Si l'on observe bien, on se rend compte que, pour tracer l'étoile, «Scratchy » effectue 3 tours complets et 10 rotations identiques.
Or 1 tour complet correspond à 360°, donc :

$$angle\ de\ rotation = \frac{3 \times 360°}{10} = 108°$$

Conjecture :

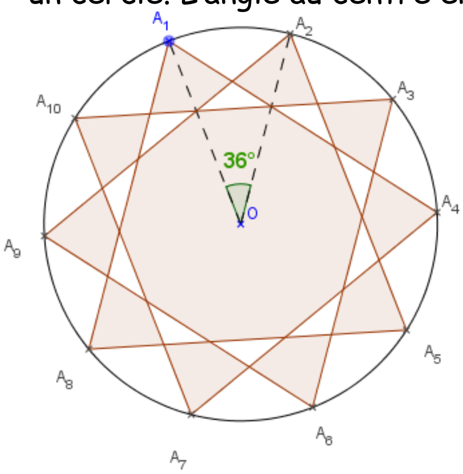
Lorsque notre lutin atteint un sommet de l'étoile, il doit **tourner de 108°** avant d'avancer vers le prochain sommet.



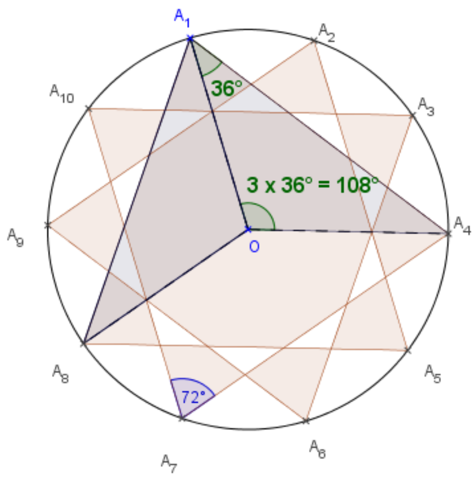
Démonstration :

Polygones réguliers et angles

Pour construire cette figure, il suffit de placer 10 points, équitablement répartis sur un cercle. L'angle au centre entre 2 points successifs mesure 36°.



L'étoile est obtenue en traçant le polygone $A_1 A_4 A_7 A_{10} A_3 A_6 A_9 A_2 A_5 A_8$



Les triangles OA_1A_4 et OA_1A_8 sont deux triangles isocèles en O d'angles 108° et 36°.

L'angle entre deux côtés successifs du polygone est donc égale à 72°.

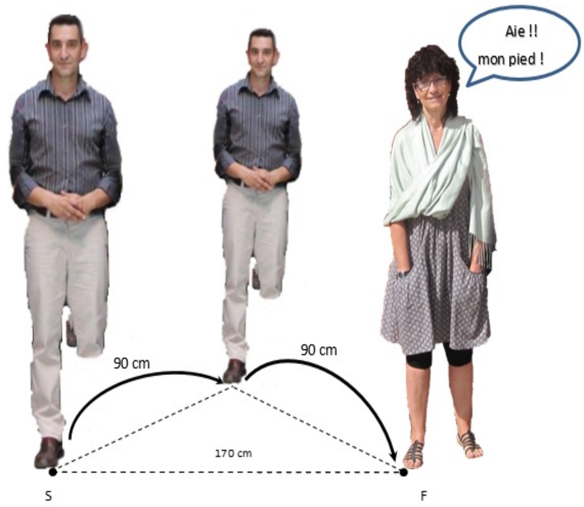
Énigme 3 (4 points) — Jeu de sot

Diviseurs et Inégalité triangulaire

Les nombres 30 ; 60 et 90 sont des multiples de 3 ; alors que 170 n'est pas divisible par 3.
Cette observation nous permet d'exclure la situation où tous les sauts seraient dans l'alignement des points S et F .

Or 90 + 90 > 170

Deux sauts suffisent.



Énigme 4 (4 points) — En retraite

Équation et fraction

Notons n l'âge de Françoise exprimée en année.

Elle a passé
la moitié de sa vie à Londres,
le cinquième à Agen,
le quart à Los Angeles, $\frac{1}{2}n + \frac{1}{5}n + \frac{1}{4}n$ exprimé en année
depuis 3ans et trois mois, elle vit à Madrid. → $3 + \frac{1}{4}$ exprimé en année

On obtient l'équation : $(\frac{1}{2}n + \frac{1}{5}n + \frac{1}{4}n) + 3 + \frac{1}{4} = n$

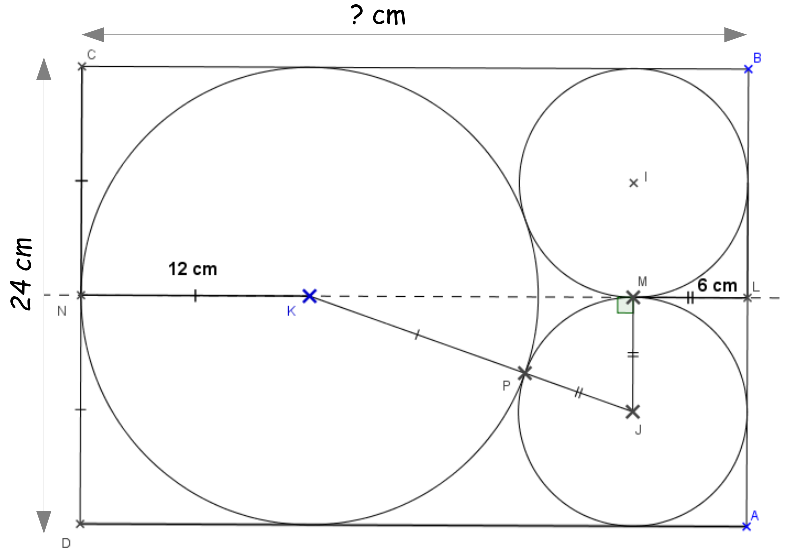
D'où $\frac{19}{20} \times n + \frac{13}{4} = n$

$\boxed{\text{Solution } n = 65}$

Énigme 5 (6 points) — Rouleaux de printemps

Cercles tangents et Pythagore

Pour déterminer la longueur BC, il suffit de trouver la longueur MK.
Le cercle de centre K est tangent en P au cercle de centre J, donc les points K, P et J sont alignés et KJ = 18 cm.



D'après Pythagore dans le triangle rectangle KJM, rectangle en M :

$$MK = \sqrt{18^2 - 6^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

d'où *La longueur de ce rectangle est égale à* $18 + 12\sqrt{2}$

Énigme 6 *(4 points)*

Cryptarithme

Stratégie

Si vous avez eu la patience et la chance de trouver la solution, pensez au JOKER !

		H	U	I	T
+		H	U	I	T
	S	E	I	Z	E

Deux additions vérifient ce cryptarithme, une seule convient.

HUIT est impair !

La solution est :

		8	2	5	3
+		8	2	5	3
	1	6	5	0	6

		~~9~~	~~2~~	~~5~~	~~4~~
+		~~9~~	~~2~~	~~5~~	~~4~~
	~~1~~	~~8~~	~~5~~	~~0~~	~~8~~

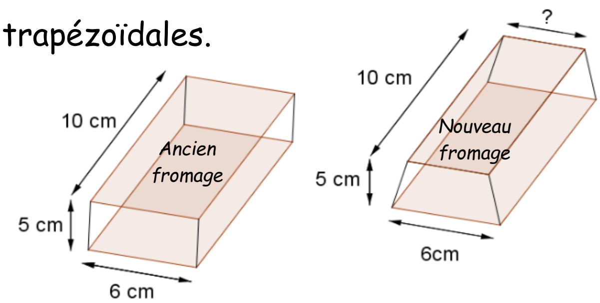
Énigme 7 *(5 points)*

Solde sur le volume !

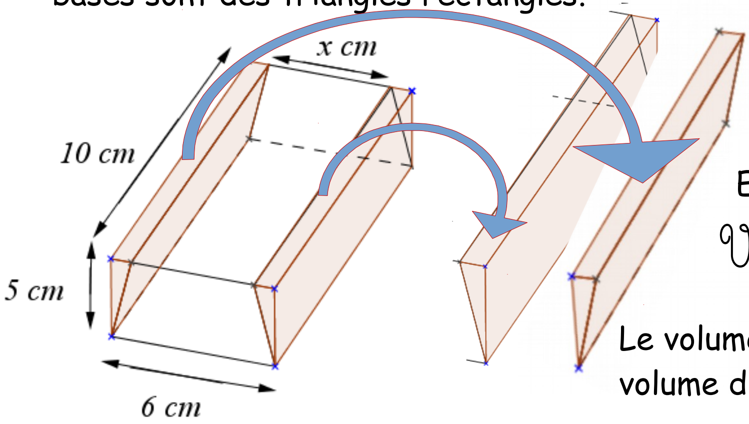
Solide et Volume

Le nouveau fromage est un prisme droit de bases trapézoïdales.

Calculons la différence de volume entre les deux fromages. Ce qui correspond au volume de la partie colorée sur la figure ci-dessous. Celle-ci est constituée de 2 prismes droits dont les bases sont des triangles rectangles.



$\mathcal{V}_{\text{ancien fromage}} = 5 \times 6 \times 10 = 300 \text{ cm}^3$



En réunissant les deux parties colorées :

$\mathcal{V}_{\text{partie colorée}} = \frac{1}{2} \times (6 - x) \times 5 \times 10 = 150 - 25x$

Le volume de la partie colorée représente 20% du volume du fromage précédent.

Ce qui nous amène à résoudre l'équation : $150 - 25x = \frac{20}{100} \times 300$

D'où $x = 3{,}6$

La longueur manquante est égale à 3,6 cm.

Énigme 8 *(7 points)*

Calcul algébrique

mathador

2017 est le 306^{e} nombre premier.

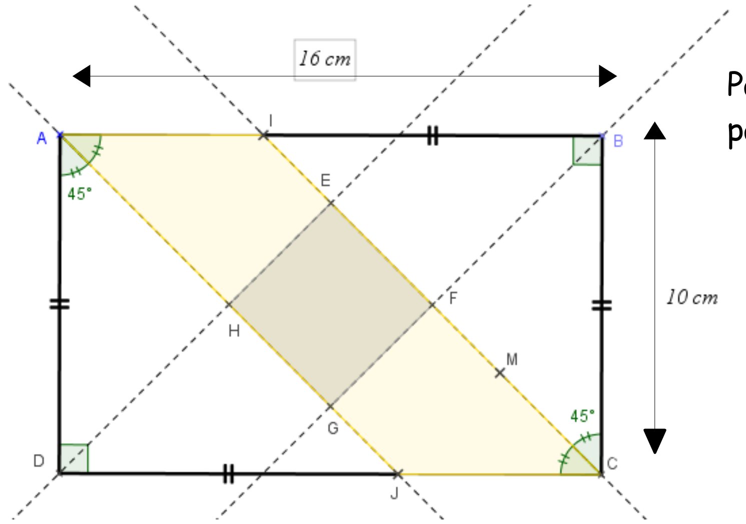
Si vous avez eu la patience et la chance de trouver, c'est le moment de placer le JOKER !

Réponse : $75 \times (50 + 4) \div 2 - 8$

Triangles, Quadrilatères et Calcul d'aire

Énigme 9 *(7 points)*

Une déco qui ne manque pas d'aire

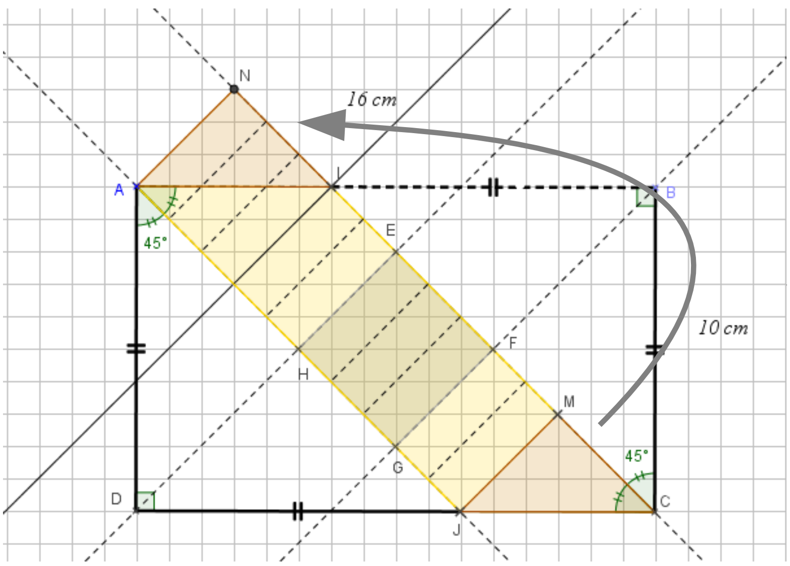


Par différence, on détermine l'aire du parallélogramme AICJ :

$$\mathcal{A}_{AICJ} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{BCI} + \mathcal{A}_{DAJ})$$

$$\mathcal{A}_{AICJ} = 160 - 100 = 60 \text{ cm}^2$$

Conjecture : Par pavage, on peut émettre une conjecture.



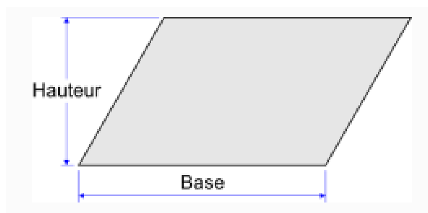
Par translation, le triangle CMJ a pour image le triangle INA. L'aire du rectangle ANMJ est identique à celle du parallélogramme AICJ.

$$\mathcal{A}_{ANMJ} = \mathcal{A}_{AICJ} = 60 \text{ cm}^2$$

Par découpage, l'aire du carré EFGH est égale aux trois dixièmes de l'aire du rectangle ANMJ.

$$\mathcal{A}_{\text{carré EFGH}} = \frac{3}{10}\,\mathcal{A}_{\text{rectangle ANMJ}} = 18 \text{ cm}^2$$

Démonstration : Montrons que EFGH est un carré de côté $3\sqrt{2}$



On va déterminer l'aire de AICJ en utilisant la formule du parallélogramme : $\mathcal{A}_{\text{parallélogramme}}$ = base x hauteur

Les triangles BCI et BCF sont rectangles et isocèles respectivement en B et F.

Donc (FG) est perpendiculaire à (CI) d'où $\mathcal{A}_{AICJ}$ = CI x FG et d'après Pythagore : $CI = 10\sqrt{2}$.

Par résolution d'équation, on trouve la longueur du segment FG :

$$10\sqrt{2} \times FG = 60$$
$$FG = 3\sqrt{2}$$

On montre de même *(par un raisonnement analogue)* que EF = FG et que EFGH est un carré *(4 angles droits et deux côtés consécutifs égaux).*

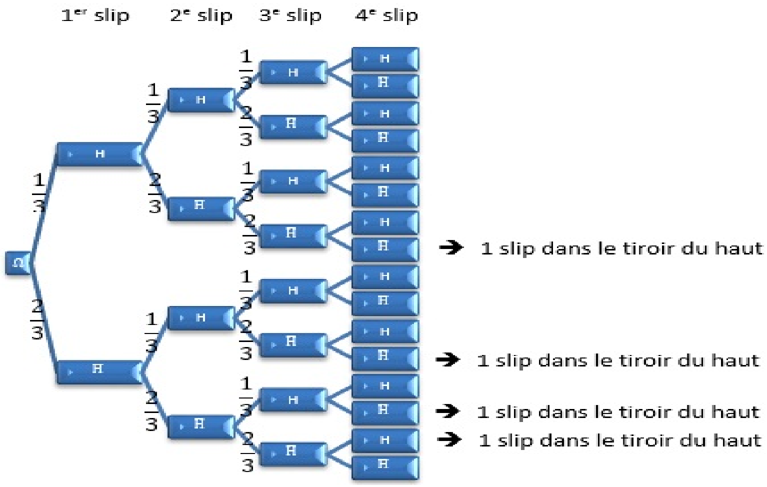
$(3\sqrt{2})^2 = 18$ donc $\mathcal{A}_{EFGH} = 18 \text{ cm}^2$

Énigme 10 *(6 points)* **Fête du Slip**

Probabilité

On note H l'évènement : «mettre un slip dans le tiroir du haut » et $\overline{\text{H}}$ l'évènement contraire.

En réalisant l'arbre pondéré des issues, on montre que l'évènement A : « il n'y a qu'un seul slip dans le tiroir du haut » est réalisé de quatre façons différentes .



$$p(A) = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{81}$$

Énigme 11 *(4 points)* **Big Bezout**

Arithmétique

Notons *n : le nombre d'adultes*

et *p : le nombre d'enfants présents à ce repas.*

On a quelques contraintes : $n + p \leq 50$

p est un nombre impair.

Françoise reçoit 11n € et redonne 8n €. Il ne lui reste alors qu'un euro. $11n - 8p = 1$

c.à.d : $11n = 8p+1$

Il suffit d'écrire la liste des multiples de 8 (avec p impair), d'ajouter 1 au résultat puis de trouver les multiples de 11.

Pour p = 15 ; n = 11 et p + n = 26

Pour p = 37 ; n = 27 et p + n = 64 > 50

=SI(MOD(E2;11)=0;QUOTIENT(E2;11);F1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	p		8p		8p+1	.	
2	1		8		9		.
3	3		24		25		.
4	5		40		41		.
5	7		56		57		.
6	9		72		73		.
7	11		88		89		.
8	13		104		105		.
9	15		120		121		11
10	17		136		137		.
11	19		152		153		.
12	21		168		169		.
13	23		184		185		.
14	25		200		201		.
15	27		216		217		.
16	29		232		233		.
17	31		248		249		.
18	33		264		265		.
19	35		280		281		.
20	37		296		297		27
21	39		312		313		.
22	41		328		329		.

Il y avait donc ***15 enfants et 11 adultes.***

Énigme 12 *(3 points)* **Touché ?**

Jeux et stratégie

Si vous avez trouvé, pensez au JOKER !