	Titre	difficulté	Notions abordées	Compétences sollicitées	
1	Bike and Walk	7 pts	Vitesse, équation ou démarche d'investigation	Modéliser, Calculer	Chercher, communiquer sont des compétences sollicitées par toutes les énigmes.
2	Éprouvant Cocktail	5 pts	Multiples d'un nombre et arithmétique	Modéliser, Calculer	
3	S.O.S. Radar	4 pts	Recherche des diviseurs d'un nombre	Raisonner, Calculer (contrôler la vraisemblance du résultat)	
4	Ladybug	3 pts	Algorithmique et programmation	Représenter, raisonner	
5	Tous en cellules grises !	4 pts	Tableur, multiples	Représenter, Calculer.	
6	Skimboard	4 pts	Calcul d'aires	Modéliser, Calculer	
7	Les foulées d'Usain	7 pts	Proportionnalité, équation	Représenter, Calculer	
8	Somme millésimée	4 pts	Manipulation de grands nombres	Modéliser, Calculer	
9	Pigeon vole	8 pts	Coordonnées sur une sphère, trigonométrie	Représenter, Modéliser, Calculer	
10	Boogles'dé	5 pts	Solides, Pythagore, Volumes et calculs.	Modéliser, Calculer	
11	Que de pneus	3 pts	équation	Calculer, représenter	
12	La poule qui rote	5 pts	Reconnaître et utiliser une rotation	Représenter, raisonner	

Énigme 1 *(7 points)* Bike and Run

Les jumeaux, Anthony et Jean Phi se partagent le vélo, mais ils ne sont pas obligés de s'attendre. Le premier peut attacher le vélo, le second le récupère en passant. Cependant, ils partent ensemble de chez eux et franchissent la grille du collège ensemble.

Notons d : la distance qu'Anthony doit parcourir en marchant. On a regroupé dans les tableaux ci-dessous les distances, les vitesses et les temps de parcours de nos jeunes candidats.

Répartition des distances (en km)

	Marche	Vélo
Anthony	d	28,5 - d
Jean Phi	28,5 - d	d

Vitesse (en km/h)

	Marche	Vélo
Anthony	4	33
Jean Phi	5,5	24

Temps pour effectuer le parcours (en h)

	Marche	Vélo
Anthony	$\frac{d}{4}$	$\frac{28{,}5-d}{33}$
Jean Phi	$\frac{28{,}5-d}{5{,}5}$	$\frac{d}{24}$

Jean Phi et Anthony partent en même temps de chez eux et arrivent au même moment au collège. Le temps du trajet de Jean Phi doit être égal à celui du trajet d'Anthony.

1$^{\text{ère}}$ méthode : Par résolution d'équation

En multipliant chaque terme par 1 452

$$\frac{d}{4}+\frac{28{,}5-d}{33}=\frac{28{,}5-d}{5{,}5}+\frac{d}{24}$$

$$363\,d+44\,(28{,}5-d)=264\,(28{,}5-d)+60{,}5\,d$$

$$319\,d+1\,254=7\,524-203{,}5\,d$$

$$522{,}5\,d=6\,270$$

$$d=12$$

2$^{\text{ème}}$ méthode : Par tâtonnement

On remarque qu'Anthony est plus rapide que Jean Phi à vélo mais à pied, c'est le contraire. On peut en déduire que :

$$distance_{JeanPhi\ à\ vélo}=distance_{Anthony\ à\ pied}<\frac{28{,}5}{2}$$

On peut faire des essais sur la répartition des distances. Comme les distances solutions sont des valeurs exactes relativement simples, les essais aboutissent assez vite.

Répartition des distances (en km)

	Marche	Vélo
Anthony	12	16,5
Jean Phi	16,5	12

Temps pour effectuer le parcours (en h)

	Marche	Vélo
Anthony	3	0,5
Jean Phi	3	0,5

Ils effectuent le trajet en 3h30min. Ils doivent donc partir au plus tard à 7h30.

Énigme 2 *(5 points)* Éprouvant Cocktail

Vous avez certainement reconnu le célèbre problème de remplissage des seaux.

ENIGME
Comment obtenir 4 L avec un seau de 5 L et un seau de 3 L ?

Le seau de 5 L a été rempli 2 fois et celui de 3 L a été vidé 2 fois.

SOLUTION

1. On remplit le seau de 5 L, et on le vide dans celui de 3 L.
2. Il reste donc 2 L dans le seau de 5 L.
3. On vide le seau de 3L et on récupère les 2 L de l'autre seau : notre seau de 3 L contient donc 2 L.
4. On remplit à nouveau le seau de 5 L. Comme le seau de 3L en contient 2, si on commence à vider celui de 5 L dans celui de 3 L, on obtient dans le plus gros seau, 5 L – 1 L = 4 L.

On va faire la même chose avec nos gobelets : on remplit un multiple de 31 cL et on vide un multiple de 27 cL

A	B	C	D
	les multiples de 31		les multiples de 27
1	31		27
2	62		54
3	93		81
4	124		108
5	155		135
6	186		162
7	217		189
8			216
9			

$$7 \times 31 - 8 \times 27 = 1$$

Robert ne remplira que 7 fois le gobelet de 31 cL.

Pour aller plus loin

La solution est assurée par le **théorème de Bezout**
27 et **31** sont premiers entre eux donc il existe deux entiers *u* et *v* tels que $27 \cdot u + 31 \cdot v = 1$.
Et grâce à l'algorithme d'Euclide pour la division euclidienne de 31 par 27, on peut obtenir : $u = -8$ et $v = 7$

Énigme 3 *(4 points)* S.O.S. Radar

Un palindrome est une suite de caractères (lettres, mots, chiffres,...) que l'on peut lire indifféremment de droite à gauche ou de gauche à droite.
Exemple : « engagelejeuquejelegagne »

$$v = \frac{d}{t}$$

	Nelly	JP	Anthony
compteur	149 976	14 494	130 939
1er palindrome	150 051	14 541	131 131
distance (en km)	75	47	192
temps (en h)	1/3	1	1,5
Vitesse (en km/heure)	225	47	128

Nelly est sur un circuit, Anthony sur autoroute et JP en ville.

Énigme 4 *(3 points)* LadyBug

Les déplacements de notre scarabée peuvent se compter en nombre de carreaux. Il se déplace d'un carreau au 1er déplacement ; de deux carreaux au 2e ; de trois carreaux au 3e ; …

Les déplacements vers la droite et vers le haut seront comptés positivement ; les mouvements inverses négativement.

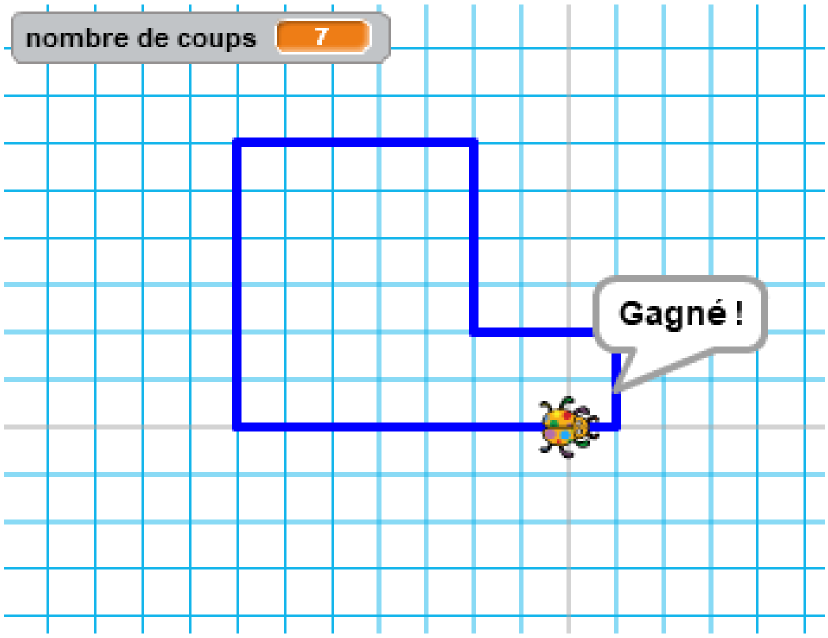
Les nombres impairs correspondent à des déplacements horizontaux et les nombres pairs correspondent à des déplacements verticaux.

(+1) + (-3) + (-5) + (+7) = 0

vers la droite — vers la gauche

(+2) + (+4) + (-6) = 0

vers le haut — vers le bas



Pour aller plus loin

Quelques curiosités sur la somme des nombres, pairs ou impairs.

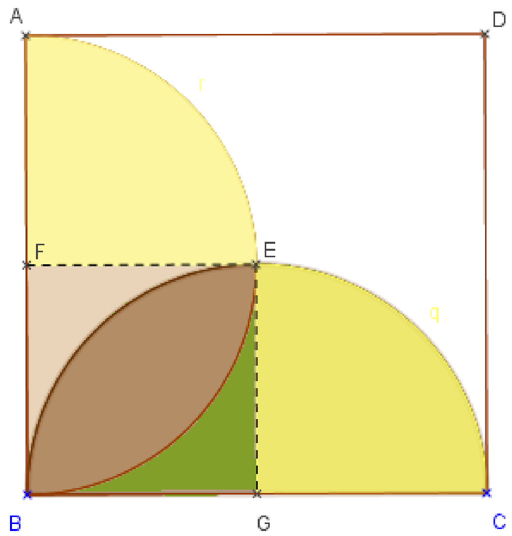
Énigme 5 *(4 points)* Tous en cellules grises !

Il est judicieux de commencer par chercher les diviseurs de 13 et de 11. Ensuite ceux de 15 et de 10.

	A	B	C	D	E
1	6	3	15	4	1080
2	5	13	7	10	4550
3	8	12	1	2	192
4	16	14	11	9	22176
5	3840	6552	1155	720	

Énigme 6 *(4 points)* Skimboard

Notons F et G les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. Les deux demi-cercles de diamètre respectivement [AB] et [BC] se coupent au point E.



Le Skimboard est découpé dans le carré EFBG de côté 1 m.

L'aire du secteur vert est égale à la différence entre l'aire du carré de côté 1 m et le quart de disque de rayon 1 m.

$$\mathcal{A}_{\text{secteur vert}} = \mathcal{A}_{\text{carré de côté 1 m}} - \frac{1}{4}\mathcal{A}_{\text{disque de rayon 1 m}}$$

$$\mathcal{A}_{\text{secteur vert}} = 1 - \frac{1}{4}\pi$$

L'aire du Skimboard est égale à la différence entre l'aire du carré de côté 1 m et les aires des deux secteurs verts.

$$\mathcal{A}_{\text{skimboard}} = \mathcal{A}_{\text{carré de côté 1 m}} - 2 \times \mathcal{A}_{\text{secteur vert}}$$

$$\mathcal{A}_{\text{skimboard}} = 1 - 2 \times \left(1 - \frac{1}{4}\pi\right) = \left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) m^2$$

Énigme 7 *(7 points)* Les foulées d'Usain

Usain va rattraper Christophe. Pour cela, il va effectuer k' foulées pendant que Christophe en fera k.
Cela signifie qu'en longueur, k' foulées d'Usain équivalent à k +30 foulées de Christophe.
Cela signifie qu'en temps, k' foulées d'Usain équivalent à k foulées de Christophe.

D'où les 2 tableaux de proportionnalité suivants :

Usain	k'	3
Christophe	$k + 30$	4

Usain	k'	9
Christophe	k	10

D'où les 2 équations suivantes : $3(k + 30) = 4k'$ et $9k = 10k'$
Donc $9k + 270 = 12k'$ et $9k = 10k'$
Donc $10k' + 270 = 12k'$ donc $2k' = 270$ donc $k' = 135$.

Usain doit faire **135** foulées pour rattraper Christophe.

Énigme 7 *(7 points)*

Les foulées d'Usain

Téléchargez la petite animation faite avec Scratch

On sait que 4 foulées de Christophe (f_C) valent 3 foulées d'Usain (f_U) :

$4 \times f_C = 3 \times f_U$ D'où : $9\ f_U = 12 \times f_C$

Quand Usain effectue 9 foulées ($9f_U = 12f_C$), Christophe en fait 10 ($10f_C$).

Après 9 foulées d'Usain, l'écart entre les deux coureurs est réduit de $2f_C$.

Christophe avait 30 foulées d'avance. Pour réduire l'écart de $30f_C$, il suffit de répéter 15 fois une réduction de $2f_C$. Usain doit effectuer 15 fois 9 foulées.

$$15 \times 9 = 135$$

Usain le rattrape en 135 foulées.

Énigme 8 *(4 points)* Somme millésimée

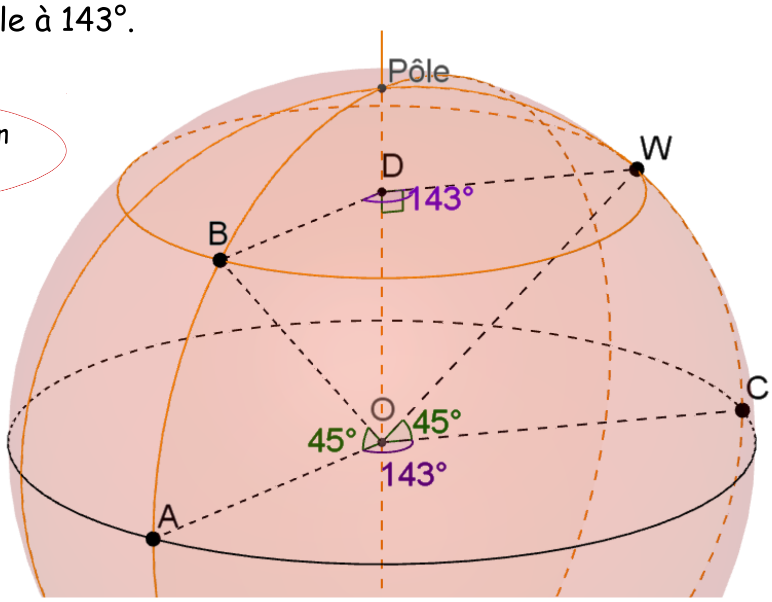
Il n'y a pas d'erreur dans le texte, on veut bien la somme des chiffres de la somme des chiffres ... $10^{2018} - 2018 = \underbrace{999......9}_{\text{2014 fois le chiffre 9}}7982$

La somme des chiffres de ce nombre est égale à : $2014 \times 9 + 7 + 9 + 8 + 2 = 18\ 152$
et la somme de ces 5 chiffres est 1+8+1+5+2=17

La somme millésimée est égale à 17.

Énigme 9 *(8 points)* Pigeon Vole

Bordeaux et Wakkanaï sont situés à 45°N, sur le même parallèle. La différence de longitude entre les deux villes est égale à 143°.



On sait que OC = OW = 6 380 km ;

$\widehat{COW} = 45°$ et $\widehat{BDW} = 143°$

On cherche la longueur de l'arc $\overset{\frown}{WB}$.

Déterminons d'abord la longueur du rayon du cercle de centre D passant par B et W.

Dans le triangle DOW, rectangle en D, on peut utiliser les relations trigonométriques :

$$\sin(\widehat{DOW}) = \frac{DW}{OW}$$

$$DW = 6\ 380 \times \sin(45°) = 3\ 190\sqrt{2}$$

La longueur d'un arc de cercle de rayon r est proportionnelle à l'angle au centre.

	angle au centre	longueur de l'arc
tour complet	360°	2 x π x r
Arc $\overset{\frown}{WB}$	143°	L

D'où $L = arc(\overset{\frown}{WB}) = 2 \cdot \pi \times 3\ 190\sqrt{2} \times \frac{143}{360} \simeq 11\ 259\,km$

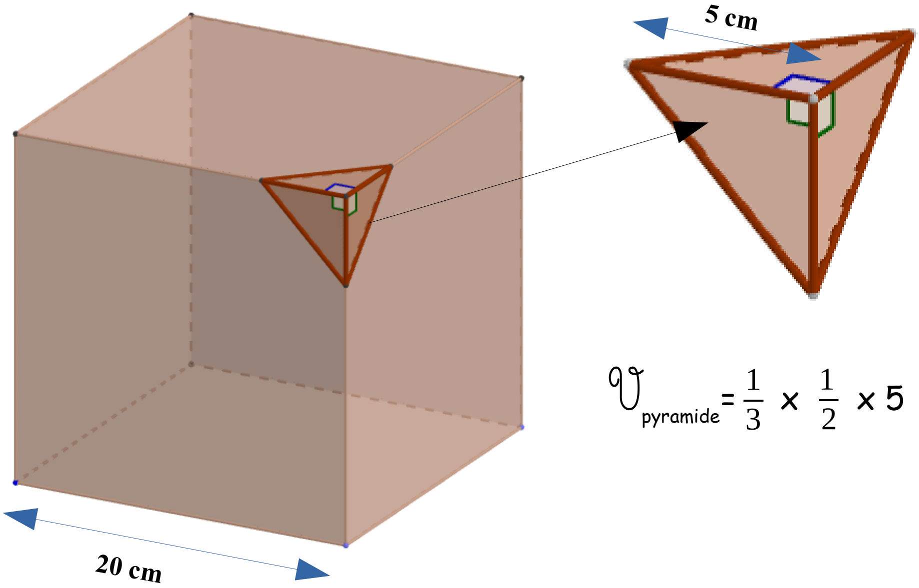
Le périple de Léon le pigeon est d'environ 11 259 km.

Énigme 10 *(5 points)* Boogles'dé

Le volume du dé est obtenu par la différence entre le volume du cube d'arête 20 cm et les volumes des 8 pyramides.

$$\mathcal{V}_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{base}} \times h_{\text{pyramide}}$$

$$\mathcal{V}_{\text{cube}} = 20 \times 20 \times 20 = 8\,000 \text{ cm}^3$$



La pyramide a pour base un triangle rectangle isocèle et pour hauteur 5 cm.

$$\mathcal{V}_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times 5 = \frac{1}{6} \times 125$$

$$\mathcal{V}_{\text{dé}} = 8\,000 - 8 \times \frac{1}{6} \times 125 = 8\,000 - \frac{500}{3} = \frac{23\,500}{3} \text{ cm}^3$$

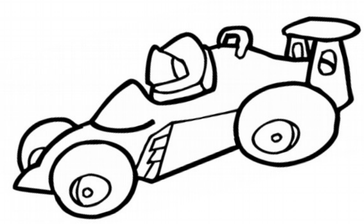
Pour aller plus loin

Déterminer la longueur des arêtes des 8 pyramides pour que ce dé soit un solide archimédien.

Énigme 11 *(3 points)*

Soit x le nombre de trains de pneus utilisés lors de la première séance d'essai libre. Alors $2x$ est le nombre de trains de pneus utilisés lors de la deuxième séance d'essai libre, x le nombre de trains de pneus utilisés lors de la troisième séance d'essai libre et $x + 1$ le nombre de trains de pneus utilisés lors des qualifications.
On appelle a le nombre de trains de pneus restants.

$$x + 2x + x + x + 1 + x + a = 13$$
$$5x + 1 + a = 13$$
$$5x + a = 12$$



Sachant que $x > 1$, on $x = 2$ et $a = 2$.

Il reste deux trains de pneus pour le Grand Prix.

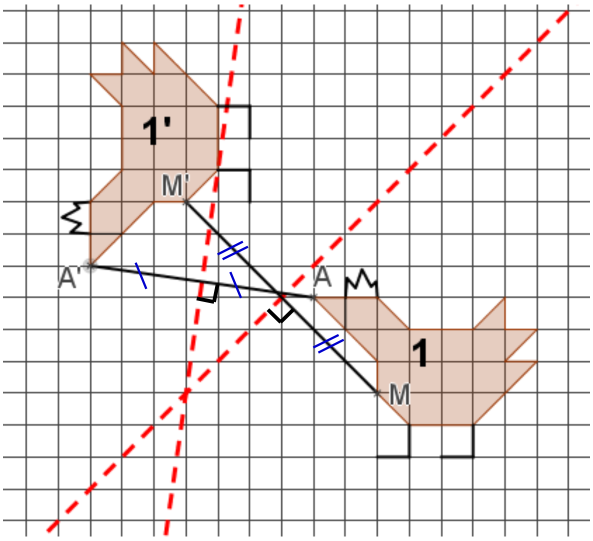
Énigme 12 *(5 points)*

La poule qui rote

Une rotation est définie par son centre, son angle et son sens.

Pour passer de la poule 1 à la poule 1', on remarque que l'on effectue une rotation d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (appelé sens direct en trigonométrie).

Il ne reste plus qu'à déterminer le centre de cette rotation.



Considérons A et M, deux points de la poule 1 puis A' et M' leurs images respectives sur la poule 1'.
Le centre est obtenu par le point d'intersection des médiatrices de [AA'] et de [MM'].

La poule 2 est obtenue par la rotation de la poule 2' de centre A1, d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (appelé sens indirect en trigonométrie).