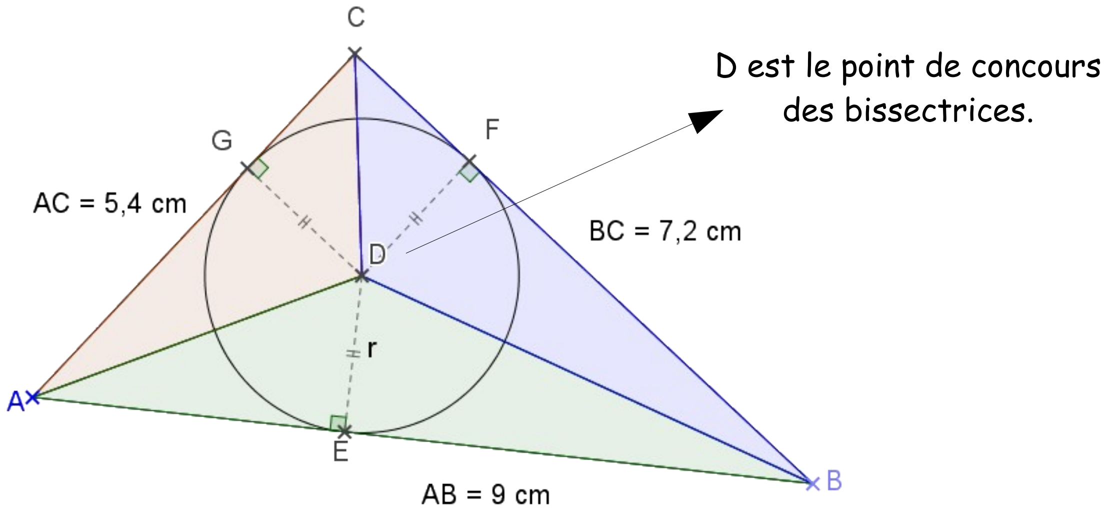
	Titre	difficulté	Notions abordées	Compétences sollicitées	
1	*C'est dans l'aire*	7 pts	Pythagore, cercle tangent, aire d'un triangle et équation.	Modéliser, Calculer	Chercher, communiquer sont des compétences sollicitées par toutes les énigmes.
2	Une tête au carré	5 pts	Pythagore, développer, factoriser (id. remarquables) et arithmétique.	Modéliser, calculer, raisonner ou démarche d'investigation	
3	Piste noire	4 pts	Dénombrement	Représenter, Calculer	
4	L'étoilée	4 pts	jeux et stratégie	Modéliser, Raisonner	
5	Où est Paule ?	5 pts	Cryptographie	Modéliser, Raisonner	
6	The King	4 pts	Stratégie	Raisonner, Calculer	
7	Mauvaise pioche	6 pts	Dénombrement, arithmétique et probabilité		
8	Romanesco	6 pts	Vocabulaire spécifique	Calculer, représenter, raisonner	
9	Dame de coeur	5 pts	Mise en équation et résolution astucieuse	Représenter, Modéliser, Calculer	
10	Magellan	8 pts	Coordonnées sphériques, Trigonométrie et proportionnalité	Représenter, Modéliser, Calculer	
11	Contre Marche	5 pts	algorithmique (scratch), trigonométrie et coordonnées cartésiennes.	Calculer, représenter	
12	Arithmétor	4 pts	Arithmétique	Modéliser, Raisonner	

Énigme 1 *C'est dans l'aire* *(7 points)*

Pythagore, cercle tangent, aire d'un triangle et équation.

On cherche la valeur r du rayon du cercle inscrit *(tangent au trois côtés)* au triangle ABC.



Le titre « c'est dans l'aire » incite à regarder les aires et à chercher des égalités

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{BCD} + \mathcal{A}_{ACD} = \frac{AB \times r}{2} + \frac{BC \times r}{2} + \frac{AC \times r}{2}$$

$$= \frac{r}{2} \times (9 + 7{,}2 + 5{,}4)$$

$$= 10{,}8\ r$$

En observant ce triangle d'un peu plus près…

$$AB^2 = 9^2 = 81$$

$$\left.\begin{array}{l} BC^2 = 7{,}2^2 = 51{,}84 \\ AC^2 = 5{,}4^2 = 29{,}16 \end{array}\right\} \quad 51{,}84 + 29{,}16 = 81 \ \text{ donc } \ AB^2 = BC^2 + AC^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en C. On peut alors trouver l'aire du triangle ABC.

$$\mathcal{A}_{ABc} = \frac{AC \times AB}{2} = \frac{5{,}4 \times 7{,}2}{2} = 19{,}44\ cm^2$$

On trouve ainsi la valeur de r, en résolvant l'équation :

$$10{,}8r = 19{,}44$$

$$r = \frac{19{,}44}{10{,}8}$$

$$r = 1{,}8\,cm$$

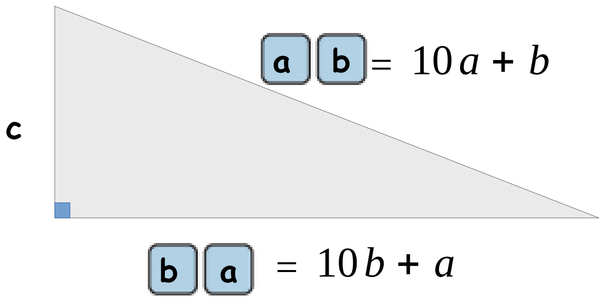
Cercle inscrit

Le rayon de ce cercle est égal à 1,8 cm.

Pythagore, identités remarquables et arithmétique

Énigme 2 Tête au carré *(5 points)*

a et **b** sont deux nombres entiers inférieur à 10.
c est un nombre entier



Ce triangle étant rectangle, l'égalité de Pythagore nous permet d'exprimer la longueur du 3ème côté.

$$c^2 = (10a + b)^2 - (10b + a)^2$$

En développant et en simplifiant

$$c^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 - (100b^2 + 20ab + a^2)$$

$$c^2 = 99a^2 - 99b^2$$

En factorisant maintenant

$$c^2 = 99(a - b)(a + b) = 9 \times 11(a - b)(a + b)$$

$$c \in \mathbb{N} \quad ssi \quad (a + b)(a - b) = 11 \times n^2$$

$$Si \quad a = 7 \quad et \quad b = 4 \quad alors \quad a + b = 11 \quad et \quad a - b = 3$$

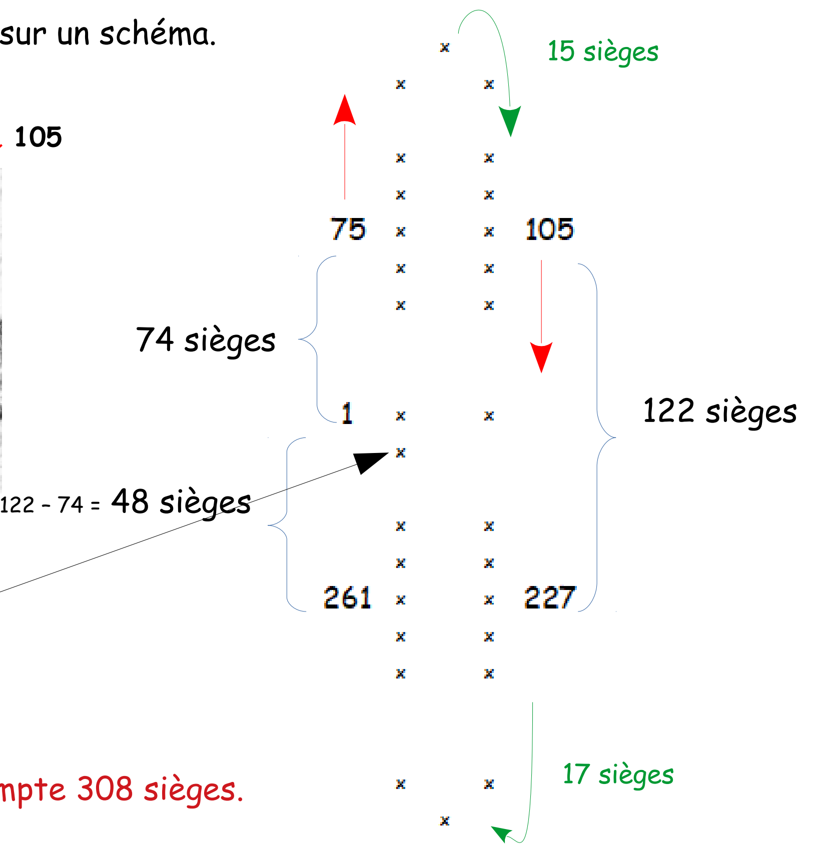
$$Si \quad a = 6 \quad et \quad b = 5 \quad alors \quad a + b = 11 \quad et \quad a - b = 1$$

J'ai 65 ans.

Énigme 3 Piste Noire *(4 points)*

Dénombrement

Représentons la situation sur un schéma.



Cette remontée mécanique compte 308 sièges.

$$(15 + 17 + 122) \times 2 = 154 \times 2 = 308$$

Énigme 4 L'étoilée *(4 points)*

Jeu et stratégie

Voici une stratégie pour résoudre cette énigme. On commence par classer les « mots » (nombres jusqu'à cent) en fonction de leur nombre de lettres.

2 ou 3 lettres	4 lettres	5 lettres	6 lettres	7 lettres	8 lettres
UN	DEUX	TROIS	QUATRE	DIX SEPT	QUATORZE
SIX	CINQ	DOUZE	TREIZE	DIX HUIT	VINGT SIX
DIX	SEPT	SEIZE	QUINZE	DIX NEUF	QUARANTE
	HUIT	VINGT	TRENTE		SOIXANTE
	NEUF				
	ONZE				
	CENT				

	Q	U	A	R	A	N	T	E
+		D	I	X	H	U	I	T
+			T	R	E	N	T	E
+				D	O	U	Z	E
					C	E	N	T

		4	0
+		1	8
+		3	0
+		1	2
	1	0	0

Énigme 5 Où est Paule *(5 points)*

Le décalage du code César est de 11 (clé du codage)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K

codage

décodage

Voici le décryptage du message :

Laalcptw nzxazdp o'fy nlocly pe o'fyp ltrftwwp ltxlyepp xzmtwp, ozye wl

Appareil composé d'un cadran et d'une aiguille aimantée mobile, dont la

aztyep xlcbfp wl otcpnetzy of yzco. Bfpw pde npe zmupe ?

pointe marque la direction du nord. Quel est cet objet ?

L'objet cherché est une « BOUSSOLE »

Énigme 6 The King *(4 points)*

Lors de ce tournoi d'échec, chaque joueur a rencontré tous les concurrents une seule fois.
On sait qu'une victoire rapporte 5 points.
Or le gagnant a réalisé un score de 39 points. Il y a donc eu au moins 8 parties et le champion n'a pas remporté tous ces matchs.
Le score le plus faible de ce tournoi est de 11 points et le joueur n'a pas perdu tous ces matchs. Un match nul rapporte 3 points et une défaite 1 point. Il y a donc eu au plus 9 parties.

	Victoire 5 points	Nul 3 points	Défaite 1 point	score
8 parties	6	3	0	39
	0	1	7	10
7parties	1	0	6	11

En huit parties, on peut obtenir 39 points, mais le score de 11 points n'est pas réalisable.

	Victoire 5 points	Nul 3 points	Défaite 1 point	score
9 parties	7	1	1	39
	0	1	8	11
	6	3	0	39

En neuf parties, il y a deux façons d'obtenir 39 points et une seule pour atteindre 11 points.

Il y avait 10 concurrents à ce tournoi d'échec.

Énigme 7 Mauvaise pioche *(6 points)*

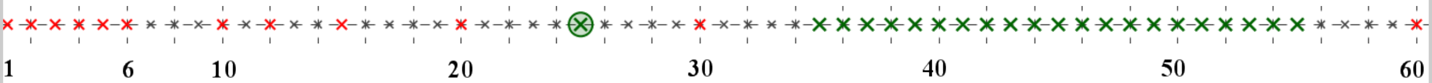
Dénombrement, arithmétique et probabilité

Le jeu de cartes est composée de 60 cartes, numérotées de 1 à 60.
Comptons le nombre de cartes qui répondent à la contrainte de notre magicien.
Commençons par lister les diviseurs de 60 :

{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60 } → représenter en rouge sur le schéma.

Une carte réalise la contrainte du magicien si elle porte un nombre dont la différence avec l'un des diviseurs de 60 est strictement inférieur à 5.
Il est plus facile de lister les cartes qui ne réalisent pas la contrainte :
{25 ; 35 ; 36 ; 37 ; 38 ; 39 ; 40 ; 41 ; 42 ; 43 ; 44 ; 45 ; 46 ; 47 ; 48 ; 49 ; 50 ; 51 ; 52 ; 53 ; 54 ; 55}

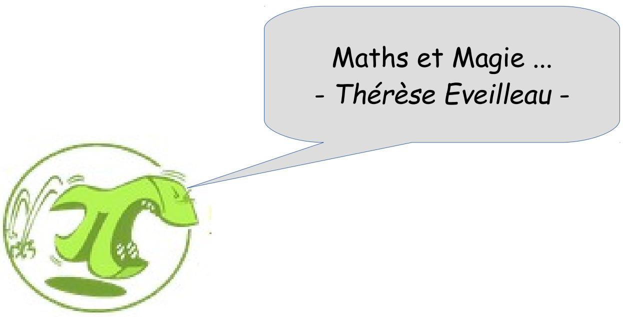
→ représenter en vert sur le schéma.



La probabilité que l'évènement se réalise est :

$$p(\text{La contrainte du magicien se réalise}) = \frac{\textit{nombre de cartes réalisant la contrainte}}{\textit{nombre total de cartes du jeu}}$$

$$p(\text{La contrainte du magicien de réalise }) = \frac{60-22}{60} = \frac{38}{60} \approx 0{,}63333$$



Vocabulaire spécifique

Énigme 8 Romanesco *(6 points)*

▭	⬇	4
○	➡	9
△	⬆	4
◊	⬅	7
☺	⬇	9
♡	➡	3
☆	⬆	4

F	A	T	Z	I	E	U	R	S	C
Q	M	S	L	O	K	C	J	H	G
W	F	E	B	C	V	O	Z	P	U
P	M	G	H	N	K	I	S	M	P
R	H	B	N	C	R	O	A	D	A
Y	X	N	L	S	E	Z	T	O	I
Q	P	H	T	L	M	R	P	C	N
L	P	G	J	V	D	O	Y	F	E
K	Y	U	O	C	N	L	M	Z	P
N	T	A	M	B	L	N	K	L	D

Le mot caché est « FRACTALE »

Mise en équation et résolution astucieuse

Énigme 9 Dame de coeur *(5 points)*

Notons c le prix (en €) d'une coupe de glace, v le prix (en €) d'un verre de jus de fruit et p le prix (en €) d'une pizza.
D'après les trois commandes, on obtient les trois équations suivantes

$$\begin{cases} (1)\ 1c + 1v + 2p = 33{,}70 \\ (2)\ 2c + 1v + 1p = 27{,}30 \\ (3)\ \phantom{2c+{}} 2v + 3p = 43{,}60 \end{cases}$$

$$(1) \xrightarrow{\times 2} 2c + 2v + 4p = 67{,}40$$

$$(2) \longrightarrow - \quad 2c + 1v + 1p = 27{,}30$$

$$1v + 3p = 40{,}10$$

En utilisant ce résultat et la 3ème commande, on obtient très vite le prix d'un verre de jus de fruit.

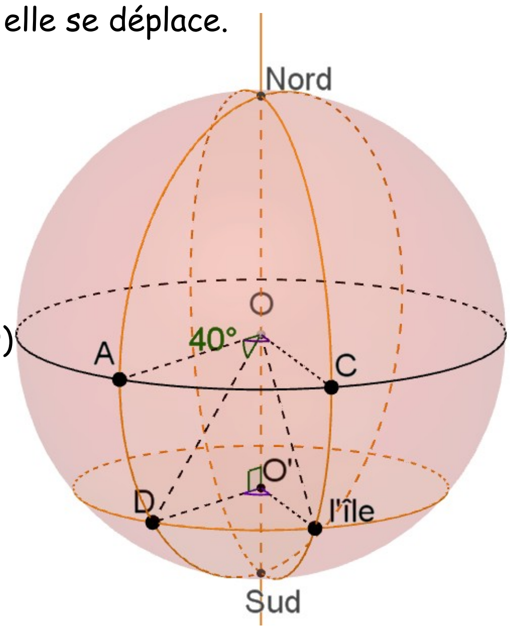
$$\begin{aligned} 2v + 3p &= 43{,}60 \\ -\quad 1v + 3p &= 40{,}10 \\ \hline 1v &= 3{,}50 \end{aligned}$$

Un verre de jus de fruit est facturé 3,50 €.

Énigme 10 Magellan *(8 points)*

Coordonnées sphériques, Trigonométrie et proportionnalité

La navigatrice se déplace sur le parallèle situé à 40° au Sud de l'équateur. Pour déterminer sa position lorsqu'elle arrive sur une île après un parcours de 2 392 miles marins, on va dans un premier temps, déterminer le rayon du cercle sur lequel elle se déplace.



Notons D le point de départ, de coordonnées (40°S ; 62° O) et A le point de l'équateur de longitude 40° S.

On a donc OD = rayon_{terre} = 6 370 km ;

$$\widehat{AOD} = 40° \quad donc \quad \widehat{DOO'} = 50°$$

Dans le triangle DOO', rectangle en O', on peut utiliser les relations trigonométriques :
$$\sin(\widehat{DOO'}) = \frac{O'D}{OD}$$

$$DO' = 6\ 370 \times \sin(50°) \approx 4\ 880\ km$$

Déterminons d'abord la longueur de l'arc $\overset{\frown}{DI}$ en km.

$$1\ mile\ marin \approx 1{,}852\ km$$

$$donc\ \ 2\ 392\ mile\ marin \approx 1{,}852 \times 2\ 392 \approx 4\ 430\ km$$

L'angle au centre est proportionnel à la longueur de cet arc de cercle.

	angle au centre	longueur de l'arc
tour complet	360°	2 x π x r = 2 x π x 4 880 ~ 30 662 km
Arc $\overset{\frown}{DI}$	a	4 430 km

$$a \approx \frac{4\ 430 \times 360}{30\ 662} \approx 52°$$

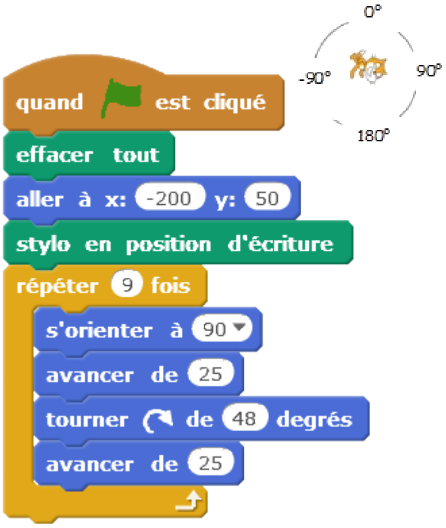
La navigatrice s'est déplacée de 52 ° vers l'Est.

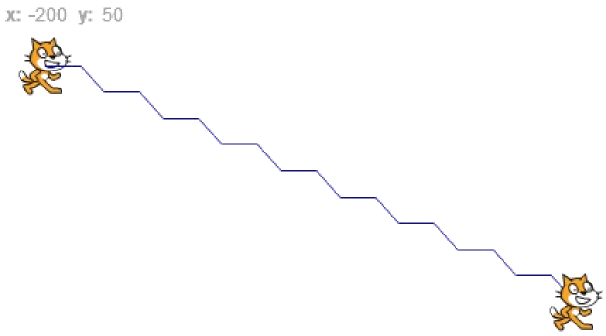
Elle atteint l'île au point I, de coordonnées (40°S ; 10° O).

Énigme 11 Contre Marche *(5 points)*

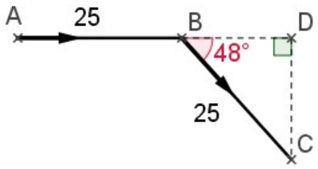
Algorithmique (scratch), trigonométrie et coordonnées cartésiennes

Le lutin part du point A(-200 ; 50) puis il réalise 9 déplacements identiques.





La figure ci-dessous décrit un déplacement.



Le triangle BDC est rectangle en D, donc : $BD = 25 \times \cos(48°) \approx 16{,}73$

et $DC = 25 \times \sin(48°) \approx 18{,}58$

On peut alors exprimer les coordonnées du point C en fonction de celles du point A.

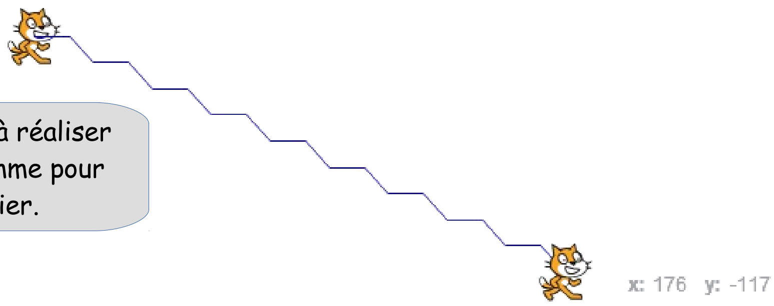
$$x_C = x_A + 25 + 25 \times \cos(48°) \approx -158{,}27$$

$$y_C = y_A - 25 \times \sin(48°) \approx 31{,}42$$

On peut alors exprimer les coordonnées du point S (point à l'arrivée) en fonction de celles du point A.

$$x_S = x_A + 9 \times (25 + 25 \times \cos(48°)) \approx 175{,}55$$

$$y_S = y_A - 9 \times (25 \times \sin(48°)) \approx -117{,}21$$



Les coordonnées du lutin à l'arrivée sont (176 ; - 117).

Énigme 12 Arithmétor *(4 points)*

Notons n le nombre de cartes Pokémon de Tonyo. On sait que $250 < n < 300$.
Traduisons à l'aide de divisions euclidiennes les informations des différentes distributions.

1ère distribution
Avec toutes ses cartes, Tonyo fait trois tas identiques, il reste alors 2 cartes qu'il laisse sur la table.

$$\begin{array}{r|l} n & 3 \\ \hline 2 & p \end{array}$$

$n = 3\,p + 2$

Voici la liste des nombres compris entre 250 et 300 dont le reste est 2 dans la division euclidienne par 3.

3 p	249	252	255	258	261	264	267	270	273	276	279	282	285	288	291	294	297
3 p + 2	251	254	257	260	263	266	269	272	275	278	281	284	287	290	293	296	299

2ème distribution
Tonyo reprend les cartes des trois tas. Puis il fait quatre tas identiques, il reste alors 3 cartes qu'il laisse sur la table.

$$\begin{array}{r|l} n\text{-}2 & 4 \\ \hline 3 & p' \end{array}$$

$n - 2 = 4\,p' + 3$

$n = 4\,p' + 5$

Voici la liste des nombres compris entre 250 et 300 vérifiant cette égalité.

4 p'	248	252	256	260	264	268	272	276	280	284	288	292	296
4 p' + 5	253	257	261	265	269	273	277	281	285	289	293	297	301

3ère distribution
Tonyo reprend les cartes des quatre tas précédents et les 2 cartes de la 1ère distribution.
Cette fois-ci, il réussi à poser toutes les cartes en réalisant cinq tas identiques.

$$\begin{array}{r|l} n\text{-}3 & 5 \\ \hline 0 & q \end{array}$$

$n - 3 = 5\,q$

$n = 5\,q + 3$

Le nombre n a pour chiffre des unités 3 ou 8.

Tonyo possède 293 cartes Pokémon.