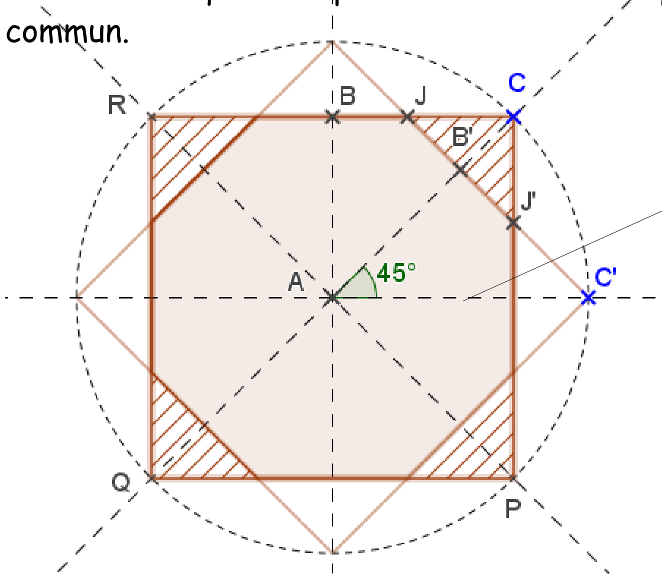
	Titre	difficulté	Notions abordées	Compétences sollicitées	
1	Lancer de Fusée Javelot	6 pts	Rotation, calcul d'aire, équation et Pythagore.	Modéliser, Calculer	Chercher, communiquer sont des compétences sollicitées par toutes les énigmes.
2	Un code presque parfait	6 pts	Arithmétique : nombres 1^{ers} – carrés parfaits - diviseurs	Raisonner, Calculer	
3	Big Bezout	4 pts	Arithmétiques : multiples	Modéliser, Calculer	
4	L'important, c'est de participer	3 pts	Somme astucieuse (suite)	Calculer, représenter	
5	Podium	6 pts	Construction de cercles tangents et Pythagore	Représenter, raisonner, calculer	
6	Cousins Germains	3 pts	Arithmétique (nombres 1^{ers}) et stratégie	Raisonner, Calculer	
7	Que la montagne est belle !	8 pts	Homothétie, agrandissement, calcul d'aires	Calculer, raisonner	
8	Les JO de la transformation	4 pts	Symétrie, translation et probabilité (dénombrement)	Calculer, représenter, raisonner	
9	Chorégraphie en folie	5 pts	Algorithmique (scratch), angles et diagonale d'un carré	Représenter, Modéliser, Calculer	
10	La plage	5 pts	Construction de cercles tangents et calcul d'aire	Représenter, Calculer	
11	La petite reine en folie	4 pts	Jeux et stratégie	Modéliser, Raisonner	
12	A l'envers	3 pts	Cryptographie	Modéliser, Raisonner	

Énigme 1 Lancer de Fusée Javelot *(6 points)*

Rotation, calcul d'aire, équation et Pythagore.

On cherche à calculer la surface de l'aire coloriée, obtenue par superposition de deux carrés identiques. On passe de l'un à l'autre par une rotation de 45 ° autour de leur centre commun.



Zone de Lancer

La surface de cette zone est obtenue en faisant la différence entre l'aire du carré de côté 2 m et l'aire des 4 triangles.

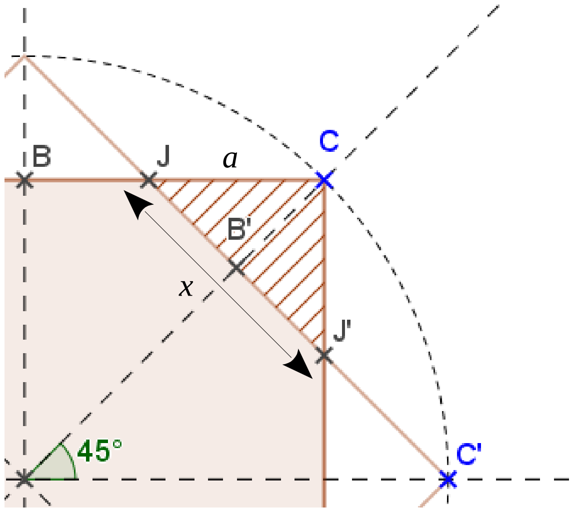
$$\mathcal{A}_{\text{zone de lancer}} = \mathcal{A}_{RCPQ} - 4 \times \mathcal{A}_{JJ'C}$$

Or $\mathcal{A}_{JJ'C} = \dfrac{CJ \times C'J'}{2}$

Par la rotation de centre A, d'angle 45°, dans le sens horaire, les points B,J et C ont pour image B', J' et C'. On en déduit que le triangle AJC a pour image AJ'C' (ces deux triangles sont donc égaux).

donc $CJ = C'J'$

D'autre part, on sait que (AC) est la médiatrice de [JJ']. On en déduit que $CJ = CJ'$



Notons $a = CJ$ et $x = JJ'$

En utilisant le théorème de Pythagore, dans le triangle CJJ' rectangle et isocèle en C, on obtient la relation :

$$x^2 = 2a^2$$
$$d'où \quad x = a\sqrt{2}$$

D'autre part, on sait que : $2a + x = 2$

On trouve ainsi la valeur de a, en résolvant l'équation :

$$2a + a\sqrt{2} = 2$$
$$a\,(2+\sqrt{2}) = 2$$
$$a = \frac{2}{(2+\sqrt{2})} = 2 - \sqrt{2}$$

On peut maintenant calculer l'aire de la zone de lancer :

$$\mathcal{A}_{\text{zone de lancer}} = \mathcal{A}_{RCPQ} - 4 \times \mathcal{A}_{JJ'C}$$
$$= 2^2 - 4 \times \frac{a^2}{2} = 4 - 4 \times \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$$
$$\mathcal{A}_{\text{zone de lancer}} = -8 + 8\sqrt{2} \approx 3{,}3$$

Réponse : La surface de la zone de lancer est d'environ 3,3 m².

Arithmétique : nombres 1[ers] – carrés parfaits – diviseurs

Énigme 2 Un code presque parfait *(6 points)*

On cherche un nombre à 5 chiffres, ne contenant aucun zéro, qui possède exactement 9 diviseurs. Le nombre de diviseurs est un nombre **impair**.
Le nombre que l'on cherche est donc un **carré parfait** compris entre 11 111 et 11 999.

Ce qui nous permet d'établir les nombres candidats suivants :

$$106^2 = 11\ 236$$
$$107^2 = 11\ 449$$
$$108^2 = 11\ 664$$
$$109^2 = 11\ 881$$

Il suffit de lister les diviseurs des 4 nombres candidats.

Les diviseurs de 11 236 sont : { 1 ; 2 ; 4 ; 53 ; 106 ; 212 ; 2 809 ; 5 618 ; 11 236}

Les diviseurs de 11 449 sont : { 1 ; 107 ; 11 449}

Les diviseurs de 11 664 sont : { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 16 ; 18 ; 24 ; 27 ; . . . ; 432 ; 486 ; 648 ; 729 ; 972 ; 1 296 ; 1 458 ; 1 944 ; 2 916 ; 3 888 ; 5 832 ; 11 664}

Les diviseurs de 11 881 sont : { 1 ; 109 ; 11 881}

Réponse : « Le code est 1 1 2 3 6 »

Arithmétiques : multiples

Énigme 3 Big Bezout *(4 points)*

Notons :
n le nombre de personnes qui ont donné 5 €
et p le nombre de personnes qui ont reçu 18 €
Le nombre de participants à cette course est compris entre 50 et 100.

On sait que : $5n - 18p = 1$ → *différence entre un multiple de 5 et un multiple de 18*

$50 < n + p < 100$

Multiples de 5 : 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60

Multiples de 18 : 18, 36, 54, 72, 90

Le nombre de participants doit être compris entre 50 et 100.

$$\begin{aligned} 55 - 54 &= 1 \\ 5 \times 11 - 18 \times 3 &= 1 \end{aligned} \xrightarrow{\times 6} \begin{aligned} 6 \times (55 - 54) &= 6 \\ 5 \times 66 - 18 \times 18 &= 5 + 1 \\ 5 \times 65 - 18 \times 18 &= 1 \end{aligned}$$

Théorème de Bezout

$$n + p = 65 + 18 = 83$$

Réponse : 83 personnes ont participé à cette course.

Énigme 4 L'important, c'est de participer *(3 points)*

Dénombrement

Le nombre de billets mis en vente est égale à la somme des nombres entiers de 1 à 2024, que l'on notera S.
Voici une astuce pour calculer cette somme.

$$\begin{array}{rl} & S = 2024 + 2023 + 2022 + 2021 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \\ + & S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2021 + 2022 + 2023 + 2024 \\ \hline & 2\,S = 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + \dots 2025 + 2025 + 2025 + 2025 \\ & 2\,S = 2025 \times 2024 \end{array}$$

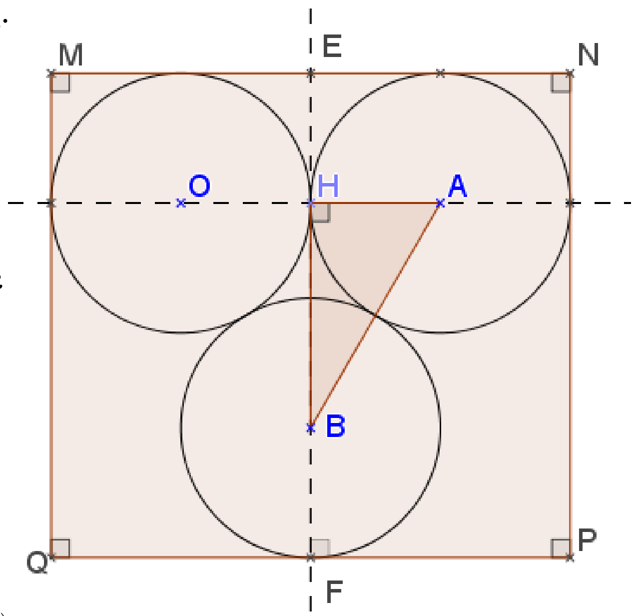
d'où $S = 2\ 049\ 300$

Réponse : 2 049 300 billets sont en vente.

Énigme 5 Podium *(6 points)*

Construction de cercles tangents et Pythagore

Les trois cercles sont tangents deux à deux et ils sont également tangents à la boîte rectangulaire. Commençons par tracer la figure à la bonne échelle.
On souhaite déterminer l'aire du **rectangle** MNPQ.



Or les cercles ont pour diamètre 10 cm

Donc $MN = 20\ cm$

$et \quad NP = EF = 5 + HB + 5$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABH, rectangle en H :

$$HB = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66\ cm$$

D'où $NP = 10 + 5\sqrt{3} \approx 18{,}66\ cm$

$$\mathcal{A}_{boite} = \mathcal{A}_{MNPQ} = MN \times NP = 20 \times (10 + 5\sqrt{3}) \approx 373{,}2\ cm^2$$

Réponse : La surface de la boîte est environ égale à 373,2 cm²

Énigm… — Arithmétique (nombres 1ers)

n	2003	2009	2011	2017	2023	2024	2027	2029	2033	2039
décomposition	1 x 2003	7^2 x 41	1 x 2011	1 x 2017	7 x 17^2		1 x 2027	1 x 2029	19 x 107	1 x 2039

On comm…

On ne garde que les nombres impairs, n'ayant pas de diviseurs évidents (critère de divisibilité par 3 et par 5).

n	2003	2009	2011	2017	2023	2024	2027	2029	2033	2039
décomposition	1 x 2003	7^2 x 41	1 x 2011	1 x 2017	7 x 17^2		1 x 2027	1 x 2029	19 x 107	1 x 2039

Pour chaque nombre 1er, n (en vert), on calcule la valeur de 2n+1 et on regarde s'il est 1er.

+ 21 + 15

n	2003	2011	2017	2024	2027	2029	2039
2n+1	4007	4023	4035		4055	4059	4079
décomposition	1 x 4007	3^3 x 149	3 x 5 x 269		5 x 811	3^2 x 11 x 41	1 x 4079

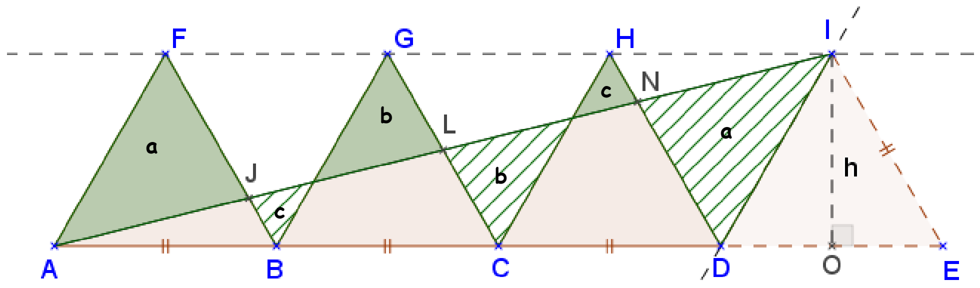
2039 est plus proche de 2024 que 2003

Réponse : le nombre Germain recherché est 2039.

Énigme 7 Que la montagne est belle *(8 points)*

Homothétie, agrandissement, calcul d'aires

Par construction, ADIF est un parallélogramme de centre L . Par la symétrie de centre L, on retrouve les triangles verts (motif du logo) de l'autre côté de la diagonale.



On note a, b et c les aires des triangles verts. (voir fig.)

Par l'homothétie de centre A, on remarque que : $c = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times a = \frac{1}{9} \times a$

$b = 2^2 \times c = \frac{4}{9} \times a$

$a + b + c = \frac{14}{9} \times a$

Il nous reste à trouver la valeur de a.

Or $a = \mathcal{A}_{AFB} - \mathcal{A}_{ABJ}$

Par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$, le triangle AIE a pour image le triangle ABJ.

$$h = \sqrt{\left(3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \mathcal{A}_{AIE} = \frac{1}{2} AE \times h = \frac{12}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

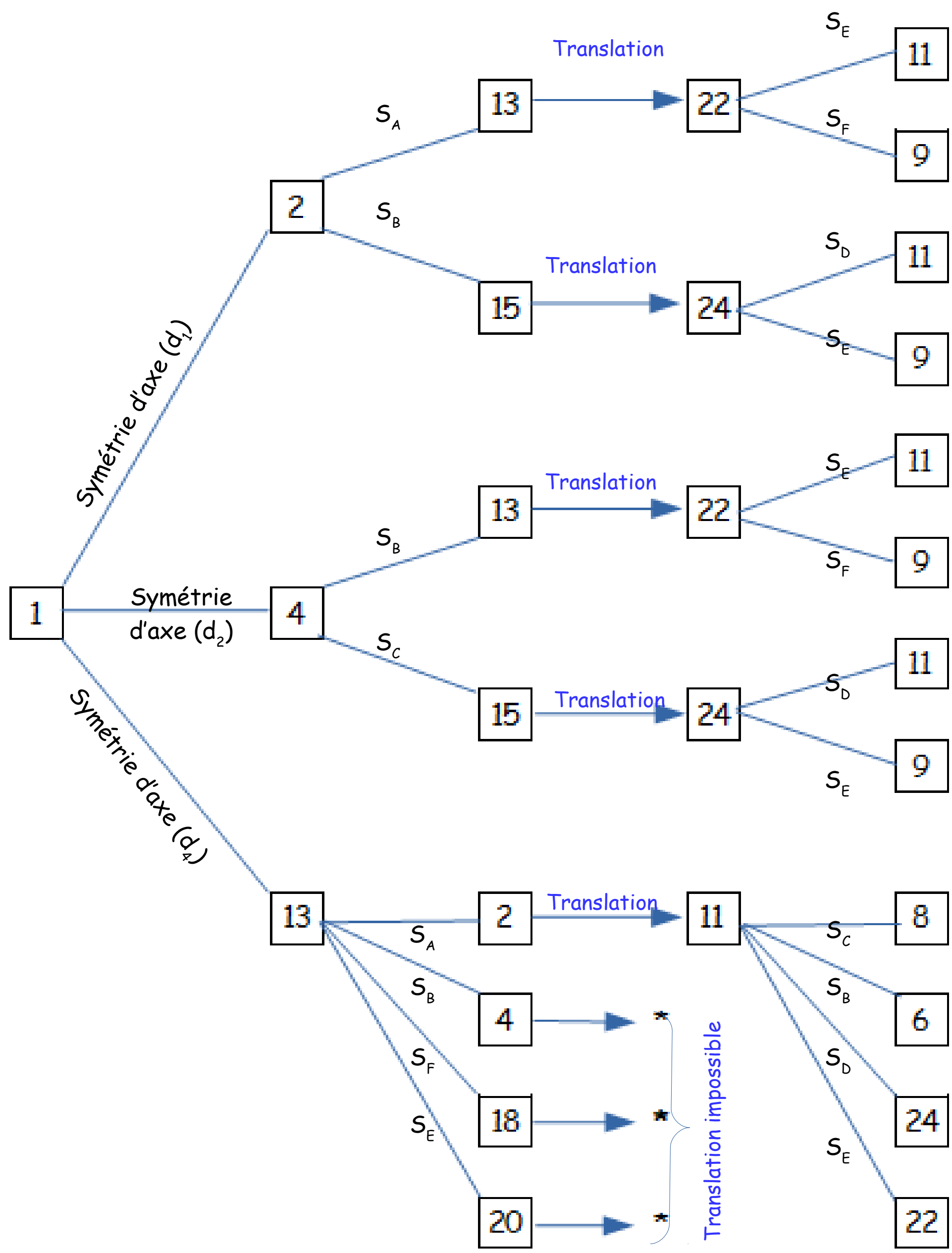
$$\mathcal{A}_{AFB} = \frac{1}{2} AB \times h = \frac{9\sqrt{3}}{4} \qquad \mathcal{A}_{ABJ} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \mathcal{A}_{AIE} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

Donc $a = \frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{16} = \frac{27\sqrt{3}}{16}$ d'où $a + b + c = \frac{14}{9} \times \frac{27\sqrt{3}}{16} = \frac{21\sqrt{3}}{8} \approx 4{,}5$

Réponse : La surface du logo est égale à $\frac{21\sqrt{3}}{8}$ cm² (environ 4,5 cm²)

Énigme 8 JO de la transformation *(4 points)*

On cherche l'emplacement de la pièce en fin de cette partie.
Nous allons représenter toutes les parties possibles.



Réponse :
En fin de partie, la pièce en forme de « L » peut se trouver sur un des emplacements n° 6 – n° 8 – n° 9 – n° 11 – n° 22 ou n° 24.

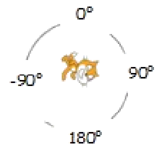
Énigme 9 Chorégraphie en folie *(5 points)*

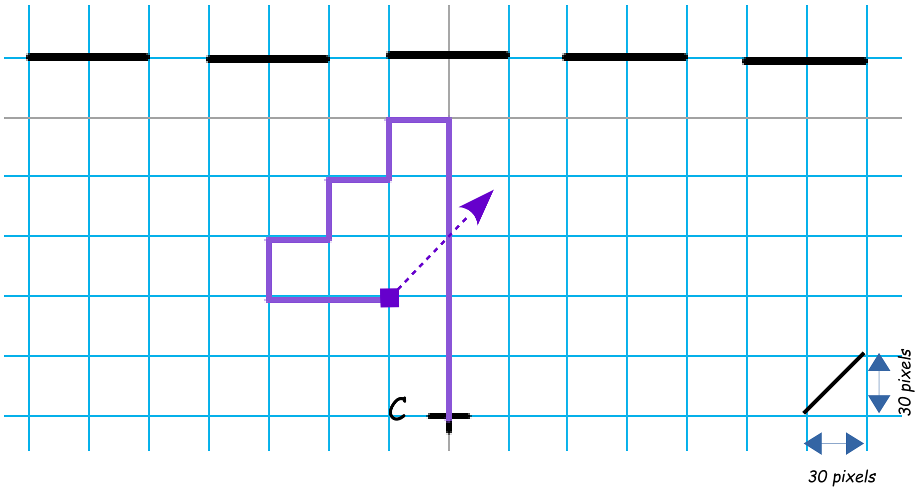
Algorithmique (scratch), angles et diagonale d'un carré

La patineuse part du point C et elle effectue une série de mouvements successifs.

1ère partie de la chorégraphie.

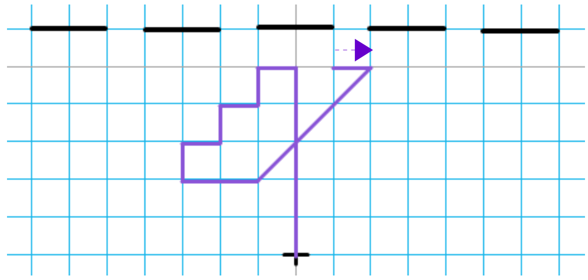
```
quand [drapeau] est cliqué
s'orienter à 0
avancer de 150
tourner ↺ de 90 degrés
répéter 3 fois
    avancer de 30
    tourner ↺ de 90 degrés
    avancer de 30
    tourner ↻ de 90 degrés
tourner ↺ de 180 degrés
avancer de 60
tourner ↺ de 45 degrés
```





La diagonale d'un carré de côté 30 pixels a pour longueur $\sqrt{1800}$ pixels

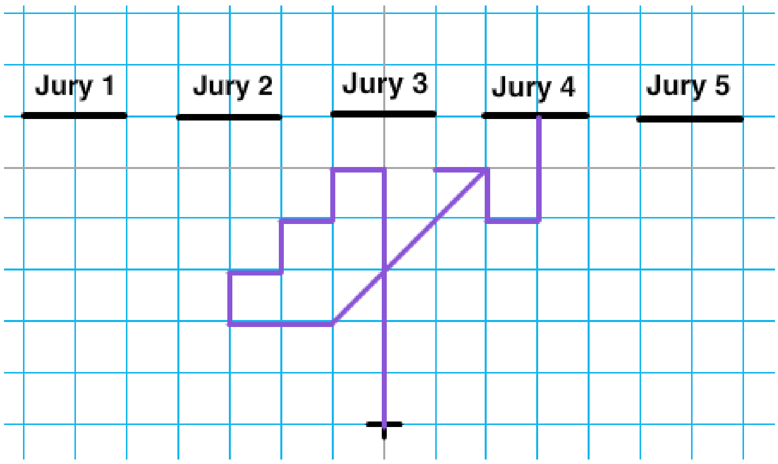
2ème partie de la chorégraphie.



```
avancer de (3 * racine de 1800)
tourner ↺ de 135 degrés
avancer de 30
s'orienter à 90
```

3ème et dernière partie de la chorégraphie.

```
avancer de 30
tourner ↻ de 90 degrés
avancer de 30
tourner ↺ de 90 degrés
avancer de 30
tourner ↺ de 90 degrés
avancer de 60
```



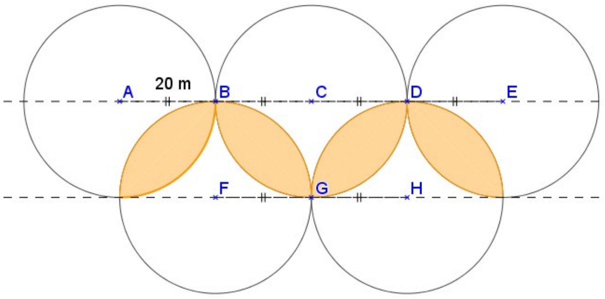
Amuse-toi à réaliser le programme pour Vérifier.

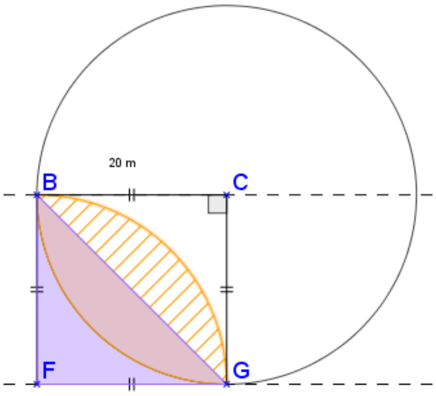
Réponse : Camille s'arrête devant le Jury 4.

Énigme 10 La plage *(5 points)*

Construction de cercles tangents et calcul d'aires

On souhaite déterminer la surface totale de ces 4 plages sont identiques.
Calculons la surface d'une plage.





$$\mathcal{A}_{1/2\ \text{plage}} = \frac{1}{4} \times \mathcal{A}_{\text{disque}} - \frac{1}{2} \times \mathcal{A}_{BCGF}$$

donc $$\mathcal{A}_{\text{plage}} = \frac{1}{2} \times \mathcal{A}_{\text{disque}} - \mathcal{A}_{BCGF} = \frac{1}{2}\pi \times 20^2 - 20^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) \times 20^2$$

$$\mathcal{A}_{\text{des 4 plages}} = 4 \times \mathcal{A}_{\text{plage}} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) \times 20^2 \approx 913{,}27\ m^2$$

Réponse : la surface totale des 4 plages est environ égale à 913 m ^{2}

Énigme 11 Les 8 Reines *(4 points)*

Jeux et stratégie

On souhaite placer 8 reines sur l'échiquier sans qu'aucune d'elles ne soient en « échec ».
Nous avons fixé la position d'une reine en A8.
Ce problème est loin d'être facile à résoudre. On peut néanmoins, avec beaucoup de persévérance trouver une des 4 solutions.

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	x							
7					x			
6								x
5						x		
4			x					
3							x	
2		x						
1				x				

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	x							
7						x		
6								x
5			x					
4							x	
3				x				
2		x						
1					x			

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	x							
7							x	
6					x			
5								x
4		x						
3				x				
2						x		
1			x					

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	x							
7							x	
6				x				
5						x		
4								x
3		x						
2					x			
1			x					

Réponses :
Les coordonnées des reines placées dans les colonnes D et H forment les 4 couples solutions de notre énigme :

1. (D 1 ; H 6)
2. (D 3 ; H 6)
3. (D 3 ; H 5)
4. (D 6 ; H 4)

Pour aller plus loin …

Wikipedia les 8 reines

la théorie des 8 reines

Jeu en ligne placer les 8 reines

Énigme 12 A l'envers *(3 points)*

La clé du codage est symétrique.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Z	Y	X	W	V	U	T	S	R	Q	P	O	N	M	L	K	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A

codage

décodage

Voici le décryptage du message :

Ovh kilxszrmh qvfc lobnkrjfvh w'vgv hvilmg xvovyivh vm Uizmxv. Ovh eroovh
Les prochains jeux olympiques d'été seront célébrés en France. Les villes

wv Ilnv, Sznylfit vg Yfwzkvhg vgzrvmg vtzovnvmg vm orxv. Oz eroov xslrhrv
de Rome, Hambourg et Budapest étaient également en lice. La ville choisie

klfi ovh qvfc hv hrgfv zf xlvfi wf yzhhrm kzirhrvm hfi fmv ylfxov wv oz Hvrmv.
pour les jeux se situe au cœur du bassin parisien sur une boucle de la Seine.

Jfvo vhg ov mln wv xvggv eroov ?
Quelle est le nom de cette ville ?

Réponse : « PARIS »